Zeitmodelle zur Klassifikation und Identifikation von Produktionsereignissen

Wilhelm Dangelmaier

Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Wirtschaftsinformatik, Insb. CIM

1 Einführung

Computer Integrated Manufacturing (CIM)[1] basiert auf vier Basisannahmen:
- Ein Arbeitsbereich ist ein abgeschlossener Knoten in einem Netzwerk.
- Eine Produktion erfolgt stets in stabilen, vollständig vorhersehbaren Prozessen.
- Die durchgängig vereinbarte Informationsbasis ist aktuell stets vollständig und konsistent.
- Der durchgängig vereinbarte Methodenbaukasten (CAD, CAQ, CAM, …, PPS) ist aktuell stets vollständig und konsistent.

Industrie 4.0 ist dagegen aktives Arbeiten in Netzwerken:
- Die Vollständigkeit von Information und Methoden wird nicht angestrebt.
- Information und Methoden werden fallweise im Netzwerk akquiriert (Gausemeier 2015).
- Jeder Akteur im Netzwerk (Mensch, Maschine, Material) kann für sich zu jedem Zeitpunkt eine hinreichende Informationslage herstellen.

Leitbild ist also ein bestimmter Werker, der zu einem beliebigen Zeitpunkt an einem beliebigen Produkt arbeitet und jetzt in einer speziellen Situation ein spezielles Werkzeug benötigt, diesen Bedarf in sein Arbeitsumfeld kommuniziert und umgehend zumindest eine Antwort erhält.

---

[1] CIM is the integration of total manufacturing enterprise by using integrated systems and data communication coupled with new managerial philosophies that improve organizational and personnel efficiency. (Auf deutsch etwa: CIM ist die Integration des gesamten Fertigungsunternehmens durch integrierte System- und Datenkommunikation gepaart mit einer neuen Managementphilosophie zur Verbesserung der organisatorischen und personellen Leistungsfähigkeit).
Definition laut AWF (Ausschuss für wirtschaftliche Fertigung, 1985): CIM beschreibt den integrierten EDV-Einsatz in allen mit der Produktion zusammenhängenden Betriebsbereichen. Es umfasst das informationstechnische Zusammenwirken zwischen CAD, CAP, CAM, CAQ und PPS. Hierbei soll die Integration der technischen und organisatorischen Funktionen zur Produkterstellung erreicht werden. Dies bedingt die gemeinsame Nutzung aller Daten eines EDV-Systems, auch Datenbasis genannt.
Produktion, 31. Juli 2012: Industrie 4.0 gleich CIM? (http://www.produktion.de/unternehmenmaerkte/interview-epson-industrie-4-0-gleich-cim/)

Aus diesem Leitbild leiten sich unmittelbar wichtige Fragen ab:

- In welcher (arbeitssystemweit verständlichen) Sprache drückt dieser Werker a priori nicht abgegrenzte/definierte Ereignisse aus?
- Wann arbeitet der betrachtete Werker bzw. der Arbeitsbereich, in dem er tätig ist?
- Wie hält dieser Arbeitsbereich mit dem Kunden vereinbarte Termine ein?
- Wie wird eine Produktkalkulation durchgeführt?

In der vorliegenden Arbeit soll ein begrenzter Beitrag zur ersten Frage geleistet und auf Anforderungen an Zeitangaben/Konzeptionen für Zeitmodelle eingegangen werden, wenn sich diese am Produktionsfortschritt/am jeweiligen Produktionsstand orientieren (müssen) und keinen Bezug zu einem universellen Zeitmodell (UTC, Gregorianischer Kalender) haben.[2] In einem zweiten Teil sollen Produktionsereignisse in einem allgemein gültigen Zeitmodell bewertet werden.

2 Ordinale Zeitmengen

Wir legen Ereignisse zugrunde, die beobachtbar sind und geordnet werden können, aber keine Anforderungen hinsichtlich Reproduzierbarkeit und Periodizität erfüllen. In der Regel werden das Ereignisse sein, die ausschließlich innerhalb des betrachteten Produktionssystems beobachtet werden - endogene, reale Ereignisse, die nur mit beschränkter Aussage in die Umwelt transportiert werden können[3].

- *Zeitmengen*

Ein Tripel $(T, \leq, t_0)$ ist eine *Zeitmenge*, wenn dafür gilt

---

[2] Die *Zeit* beschreibt die Abfolge von Ereignissen (Drosdowski et al. 1996), sie ist eine physikalische Größe mit einer eindeutigen, unumkehrbaren Richtung (Stroppe 1981, Schneider 1996). Die Naturwissenschaften bezeichnen mit dem Terminus ‚Zeit‘ niemals eine besondere Zeit neben anderen, sondern meinen immer die eine Zeit im Ganzen, also die gesamte Ordnung des Nacheinander in der Welt. Zeit wird dabei meist als Kontinuum aufgefasst: „*Wenn man ... die Zeit durch eine reelle Koordinate definiert, die Gegenwart durch einen Punkt fixiert, so ist das eine mathematische Idealisierung*“ (Straub 1990, S. 146). Diese Sicht auf eine Zeit im Ganzen differenzieren die Technikwissenschaften durchaus: Jedes einzelne Produktionssystem kann als Mikrokosmos mit eigenem Zeitverständnis angesehen werden, in dem Ereignisse nach Sachverhalten geordnet werden, die in der restlichen Welt ohne jede Relevanz sind oder sein können. Und wenn Werksurlaub, arbeitsfreie Tage, arbeitsfreie Zeiten usw. produktionssystemintern einfach nicht definiert werden, entsteht möglicherweise intern eine durchgängige Sicht, die in die Umwelt als Menge einzelner Zeitabschnitte einzubinden ist. Weil dies auch noch für jeden Kunden und jeden Lieferanten vergleichbar gilt, ist es meist zweckmäßig, in der Umwelt diese universelle Sicht wiederherzustellen.

[3] Aussage: „Ich brauche einen xyz-Schraubenschlüssel“.
Frage: „Wann?“
Antwort: „Bevor ich mit der Endmontage des Zylinderkopfs anfange“.
Zusage: „Ich gebe dir den xyz-Schraubenschlüssel, sobald ich alle M8-Schrauben angezogen habe.“
Also betrachten wir reale Ereignisse in einem Produktionsbetrieb und beschreiben deren Auftreten und Reihenfolge. Das ist möglicherweise die mit einem Betriebsdaten-Erfassungs-System protokollierte Sequenz von Ereignissen. Eine Planung im Sinne eines Produktionsplanungs- und Steuerungs-Systems und die Vorgabe von Ereignissen
ist so vor allem im Zusammenspiel mit der Umwelt nicht möglich und auch nicht beabsichtigt.

(1) T bezeichnet eine Menge.[4]
(2) $\leq$ ist eine vollständige Ordnungsrelation auf T.
(3) t_0 ist das minimale Element in $(T, \leq)$.

Eine Zeitmenge bezeichnen wir mit dem Symbol „*time*". Das minimale Element $t_0 \in T$ heißt *Startzeit* der Zeitmenge $(T, \leq, t_0)$.
time = $(T, \leq, t_0)$ bezeichne eine gegebene Zeitmenge. Für eine beliebige Menge U erhalten wir dann die von $(T, \leq)$. induzierte Ordnungsstruktur $(T', \leq ')$, die gegeben ist durch $T' := T \cap U$ und $\leq' \subset T' \times T' : t' \leq t'' : t' \leq t''$. Existiert in $(T', \leq')$ ein minimales Element $t'_0 \in T'$, dann stellt $(T', \leq ', t'_0)$ eine Zeitmenge mit Startzeit t'_0 dar. Wir nennen sie die *Einschränkung* der Zeitmenge *time* auf die Menge U und bezeichnen sie mit *time*$|\, U$. Für eine gegebene Zeitmenge *time* = $(T, \leq, t_0)$ und für die Mengen T^t mit $t > t_0$, T_t mit $t \in T$ und $T_{t,t'}$ mit $t < t$‘, die definiert sind durch $T^t := \{t'' : t'' \in T \wedge t \leq t''\} T_{t,t'} := \{t'' : t'' \in T \wedge t \leq t'' < t'\}$ heißen die Zeitmenge *time*$|T^t$ = $(T^t, \leq, t_0)$ die *Vergangenheit* von t, die Zeitmenge *time*$|T_t = (T_t, T_{t,t'}, t)$ die *Zukunft* von t, und *time*$|T_{t,t'} = (T_{t,t'}, T_{t,t'}, t)$ ein *Zeitintervall* mit *Beginn t* und *Ende* t'.

Beispiel 1: Zeitmenge time, Vergangenheit T_t und Zukunft T^t
Wir erstellen eine Zeitmenge für das Eintreffen der Werker.
time: = ({Müller, Meier, Metzger, Maler, Schulze, Schultze, Schmid, Schmied, Schmitt, Schmidt}, ≤, Müller). Dann ist Müller die Vergangenheit von Meier, Schmidt die Zukunft von Schmitt und Schmied, Schmitt und Schmidt die Zukunft von Schmid.

– *Zeitfunktionen*

Eine Funktion *f*, deren Definitionsbereich die Menge *T* einer Zeitmenge *time* $= (T, \leq, t_0)$ ist, heißt eine *Zeitfunktion* über der Zeitmenge *time*. Wenn $f : T \rightarrow M$ eine Zeitfunktion über *time* $=(T, \leq, t_0)$ mit Wertebereich M[5] ist, dann heißt das kartesische Produkt $T \times M$ die der Zeitfunktion f zugrundeliegende *Phasenmenge*, jedes Element $(t, m) \in T \times M$ eine *Phase*. Gilt für eine Phase (t, m) die Beziehung $(t, m) \in f$, dann wird das Element $m \in M$ bei f zur Zeit t *erreicht*. Für die Einschränkungen von $f : T \rightarrow M$ auf die Mengen T^t, T_t und $T_{t,t'}$ führen wir die Symbole f^t, f_t und $f_{t,t'}$ ein: $f^t := f|T^t, f_t := f|T_t$ und $f_{t,t'} := f|T_{t,t'}$. Auch die Einschränkungen f^t, f_t und $f_{t,t'}$ einer Zeitfunktion $f : T \rightarrow M$ sind Zeitfunktionen.

---

4 Es bleibt damit (vorerst) offen, ob es sich bei den Zeitelementen um Zeitabschnitte oder um Zeitpunkte handelt. Wichtig ist, dass wir die Menge *T* ordnen können. Zunächst ist das nur eine „qualitative" Menge, mit der wir nicht „rechnen": $t_1 t_2; t_1, t_2 \in T$.

5 Um ein Vorstellungsbild zu wählen: Wir haben für den Bildschirm, der am Beginn einer Montagelinie stehen soll, die Zeitachse als ordinale Zeitmenge vereinbart. Jetzt vereinbaren wir, was wir zu den einzelnen Zeitelementen eintragen können/wollen. Der Wertebereich *M* kann jetzt bspw. eine Menge von Eigennamen, bspw. Meier, Müller, Schulze, ..., die Menge der ganzen Zahlen, die Menge der reellen Zahlen ... sein.

Beispiel 2: Eigenschaften von Zeitfunktionen
f ist in diesem Beispiel nicht funktional; bspw. wird in einem Zeitelement Fahrrad Nirwana und Fahrrad Walhall produziert.

Nirwana	●	●		●
Hades		●	●	●
Walhall	●		●	●
	Müller	Meier	Metzger	Maler

– *Konkatenation von Zeitfunktionen*

Es bezeichne $time \to M$ die Menge aller Zeitfunktionen über $time = (T, \leq, t_0)$ mit Wertebereich M, demzufolge $time \to M := \{f : f : T \to M\}$. Wir definieren: Für einen beliebigen Zeitpunkt $t \in T$ ist die *Konkatenation* $\overset{\circ}{t}$ von Zeitfunktionen aus $time \to M$ gegeben durch $\overset{\circ}{t}$: $(time \to M) \times (time \to M) \to (time \to M)$: $(f, g) \to f \overset{\circ}{t} g$.

Dabei gilt $f \overset{\circ}{t} g | T^t := f^t$ und $f \overset{\circ}{t} g \, | T^t = g_t$.[6] Demnach ist das Konkatenationsprodukt $f \overset{\circ}{t} g$ von f und g diejenige Funktion aus $time \to$ M, die sich über T^t wie f und über T_t wie g verhält.[7] Für beliebige $t \in T$ und beliebige Zeitfunktionen $f, g, h \in time \to M$ gelten die folgenden Eigenschaften[8] der Konkatenationsverknüpfung $\overset{\circ}{t}$:

(1)	$f \overset{\circ}{t} f = f$	vorher *f*, nachher *f*
(2)	$(f \overset{\circ}{t} g) \overset{\circ}{t} h = f \overset{\circ}{t} (g \overset{\circ}{t} h)$,	Kommutativgesetz
(3)	$(f \overset{\circ}{t} g)^t = f^t$,	Vergangenheit bis *t*
(4)	$(f \overset{\circ}{t} g)_t = g_t$	Zukunft ab *t*
(5)	$g \overset{\circ}{t} g = g$	vorher g, nachher g

---

6 Das bedeutet: Zum Zeitpunkt *t* gilt der Wert der sich für die Zukunft von *t* anschließenden Zeitfunktion (siehe Vereinbarung von Vergangenheit und Zukunft).Das Kreuzprodukt bezeichnet den Bereich, für den die Operation definiert ist. In der Klammer *(f, g)* erklären wir das elementweise - möglicherweise nicht alles mit allem.

7 Bei algebraischen Zeitmengen führen wir auch eine „Zeitmenge mit maximalem Element" ein. Dann müssen Operationen wie bspw. die Addition und die Multiplikation abgeschlossen sein. Derartige Operationen treten hier nicht auf: Zeitfunktionen sind Aussagen zum jeweiligen Zeitpunkt, eine „Addition von Zeitpunkten" findet nicht statt. Vielmehr ist die Konkatenation genau die Operation, die die „Addition von Zeitpunkten" ersetzt: Wir können beliebige Zeitmengen mit den Regeln der Mengenlehre verknüpfen.

8 Da wir hier nur Werte zu einer bestimmten Zeit *t* verknüpfen,

- entstehen keine Probleme mit dem Anschluss: Alle Zeitfunktionen, die wir diskutieren, haben dieselbe Zeitmenge und denselben Wertebereich.
- können wir jede Zeitfunktion mit jeder anderen Zeitfunktion (*time* → *M*) ab einem beliebigen Zeitpunkt *t* kombinieren.
- müssen wir bestimmte angestrebte Verläufe über der Zeit als Teilmenge oder Element aus der Menge der durch $\overset{\circ}{t}$ generierten Zeitfunktionen auswählen. Prinzipiell ist in kartesischen Produkten die Verknüpfung jeder Zeitfunktion mit jeder anderen zulässig.
- ist die Konkatenation bzgl. der Zeit und des Wertebereichs abgeschlossen.

Wenn wir das mehrfach hintereinander zu unterschiedlichen Zeitpunkten machen, können wir eine enorme Kombinatorische Vielfalt erzeugen (Bspw. dann, wenn wir über die 52 Wochen eines Jahres unterschiedliche Wochenarbeitszeit-Modelle kombinieren).

Beispiel 3: Damenräder, Herrenräder
Wir verwenden die beiden (Teil-)Zeitmengen {Müller, Meier, Metzger, Maler} und {Schulze, Schultze, Schmidt, Schmied, Schmitt, Schmidt}. Der gemeinsame Wertebereich sei {Damenräder, Herrenräder}. Wir stellen fest: {Müller, Meier, Metzger, Maler} produzieren nur Damenräder, {Schulze, Schultze, ...} dagegen nur Herrenräder. Wir führen die beiden Zeitmengen mit {Müller, ...}, {Schulze, ...} zur aus Beispiel 1 bekannten Zeitmenge zusammen. Dann werden in der Vergangenheit von Schulze Damenräder, in der Zukunft von Schulze Herrenräder gebaut. Die Zukunft von Schmied sind ausschließlich Herrenräder.

Beispiel 4: Lackierreihenfolgen
Die Werker Müller, Meier und Schulze lackieren in den Farben rot, blau, grün und gelb, aber unterschiedlich an unterschiedlichen Wochentagen.

Wertebereich	rot	Schulze		Müller	Müller	Schulze
	blau	Meier	Müller		Schulze	Meier
	grün	Müller	Meier	Schulze	Meier	Müller
	gelb		Schulze	Meier		
		Mo	Di	Mi	Do	Fr

Als Zeitpunkt t wählen wir den Mittwoch. Als Zeitfunktionen erhalten wir dann (bis einschließlich Dienstag, ab Mittwoch) bspw.:

	Müller		Meier		
rot					
blau		Mü			Me
grün	Mü			Me	
gelb			Me		
	Mo	Di	Mi	Do	Fr

	Meier		Schulze		
rot					Sc
blau	Me			Sc	
grün		Me	Sc		
gelb					
	Mo	Di	Mi	Do	Fr

	Schulze		Müller		
rot	Sc		Mü	Mü	
blau					
grün					Mü
gelb		Sc			
	Mo	Di	Mi	Do	Fr

– *Direktes Produkt von Zeitfunktionen*

Für eine Zeitmenge $time = (T, \leq, t_0)$ und zwei Mengen A und B betrachten wir die Funktionsmengen $time \rightarrow A$, $time \rightarrow B$ und $time \rightarrow (A \times B)$ und die Abbildung $\boxtimes$. Die Abbildung $\boxtimes$ die gegeben ist durch $\boxtimes : (time \rightarrow A \times time \rightarrow B) \rightarrow (time \rightarrow (A \times B)) : (x, y) \rightarrow x \boxtimes y)$, wobei gilt: $x \boxtimes y : T \rightarrow A \times B : t \rightarrow x$

$\boxtimes\ y(t) \coloneqq (x(t), y(t))$, heißt das *direkte Produkt* von Zeitfunktionen. Statt des Symbols $x \boxtimes y$ schreiben wir einfacher xy.[9] Je Zeitelement erhalten wir Tupel von Elementen der einzelnen Wertebereiche.

Beispiel 5: Montagereihenfolge
Gegeben seien die Zeitmenge {Müller, Meier, Metzger, Maler, Schulze, ...}, die Menge A {Menge der Fahrrad-Farben} und die Menge B {Menge der Fahrrad-Modelle}. Wir erhalten als Ergebnis: {(Müller, (rot, Nirwana)), (Meier, (grün, Hades)), ...}.
Wir variieren das Beispiel und führen Wochentage Montag, Dienstag, ... als Zeitmenge Tagesprogramm ein. Wenn am Montag bspw. das Fahrrad Nirwana in der Farbe rot von Werker Müller produziert wird, müssten wir hier bspw. das direkte Produkt der Zeitfunktion mit (Montag, Werker) und (Montag, (Nirwana, rot)) bilden: (Montag, (Müller, (Nirwana, rot))).

– *time-Prozesse*

Wir definieren einen Prozess[10] in einer für unsere Zwecke sinnvollen Form: Jede Teilmenge P einer gegebenen Menge *time* $\rightarrow M$ von Zeitfunktionen heißt ein *time-Prozess* mit Wertebereich M.[11] Bei einer fest vorgegebenen Zeitmenge sprechen wir von einem *Prozess*. Ein Prozess ist demnach eine Menge von Zeitfunktionen, denen allen dieselbe Zeitmenge *time* und derselbe Wertebereich M zugrunde liegt.[12]

Ein *time*-Prozess mit Wertebereich M, der in einer Produktion einem Zählpunkt zugeordnet ist, heißt ein *Produktionsprozess*. An einem Beginn-Zählpunkt werden wir den Einsatz von Faktoren und den Beginn von Transformationen über einer gegebenen Zeitmenge, an einem Ende-Zählpunkt entsprechend das Entstehen von Produkten und das Abschließen von Transformationen beschreiben.

---

9 Der Unterschied zwischen Kreuzprodukt und direktem Produkt liegt darin, dass hier für einen Zeitpunkt/ein Zeitelement nur ein Wertepaar/Wertetupel vorliegt, während beim Kreuzprodukt ja jede Zeitfunktion mit jeder Zeitfunktion gekreuzt werden muss. Jedes Element $pq \in PQ$ist eine Zeitfunktion $pq: T \rightarrow M \times M$. Dagegen handelt es sich bei einem Element $(p, q) \in P \times Q$ um ein Paar von Zeitfunktionen $p: t \rightarrow M$ und $q: T \rightarrow M$. Selbstverständlich können wir das direkte Produkt als Multiplikation zweier Größen mit unterschiedlichem Wertebereich verstehen. Wir wollen hier aber mit dem direkten Produkt auch Sachverhalte als Tupel erfassen, die wir weder direkt multiplizieren noch direkt addieren wollen. Voraussetzung in allen Fällen ist aber die Existenz nur einer Zeitmenge t*ime*.

10 Siehe bspw.: „Ein Prozess ist die dynamische Aufeinanderfolge von verschiedenen Zuständen eines Dings bzw. Systems" (Klaus/Buhr 1985, S. 990), sowie (Bortz1999, Drosdowski et al. 1996, Ferstl 1964)

11 Wir fassen eine Menge von Zeitfunktionen zusammen. Wenn wir dies unter einem Oberbegriff tun, dann legt dieser den Namen des betreffenden Prozesses fest. „Teilmenge" heißt, dass wir bestimmte Zeitfunktionen selektieren: Jeder Prozess ist dann eine spezielle Teilmenge, die einen bestimmten Sachverhalt beschreibt. Wenn wir bspw. am Beginn einer Montagelinie, auf der wir Damen-, Herren- und Kinderräder montieren, nur den Montagebeginn der Damenräder betrachten, dann haben wir den Prozess „Beginn der Montage der Damenräder" abgegrenzt. Hinsichtlich dieser Teil- und damit hinsichtlich der Ausgangsmenge sind alle Operationen einer Teilmenge abgeschlossen.

12 Damit haben wir eine sehr offene Form der Definition bezüglich der inhaltlichen Bedeutung, andererseits eine sehr enge Definition hinsichtlich des Wertebereichs gewählt.

Beispiel 6: Lackierprozess
Wir verwenden die Zeitmenge *time* mit den Zeitelementen {Müller, Meier, ...} und den Wertebereich M: = {Nirwana, Hades, Walhall}. Dann ist ein Beispiel für einen Prozess, ... *eine Teilmenge P einer gegebenen Menge time → M von Zeitfunktionen.*

Werte-be-reich	Nirwana	gelb, rot	rot	rot	gelb	rot	rot	rot	gelb
	Hades	rot	gelb	gelb, rot		gelb, rot		rot	
	Walhall		rot		rot		gelb, rot		rot
Anlieferzeitpunkt		Müller	Meier	Metzger	Maler	Schulze	Schultze	Schmid	Schmied
		Definitionsbereich							

Dies hier sei der Prozess „Montage 1“ mit den Zeitfunktionen für die rote und die gelbe Farbe. Der Prozess „Montage 2“ betrachtet dann bspw. die blaue und die grüne Farbe. Dementsprechend ist der Zählpunkt am Beginn von Montage 1 für „Nirwana, Hades, Walhall in gelb und rot“ und derjenige am Beginn von Montage 2 als „Nirwana, Hades, Walhall in blau und grün“ vereinbart.

Wir nutzen das Konzept der Einschränkung von Zeitfunktionen, um die Einschränkung von Prozessen[13] zu definieren: Für eine beliebige Einschränkung *time* U einer Zeitmenge *me* $=(T, \leq, t_0)$ auf die Menge U sei die *Einschränkung* $P|\,U$ eines Prozesses $P \subset time \rightarrow M$ gegeben durch

$$P|\,U \coloneqq \{f' \colon \underset{f \in P}{\exists} \; f' = f|T \; \cap U\}.$$

Wenn wir die Zeitmenge *time* durch *time*$|T^t$, *time*$|T_t$ oder durch *time*$|T_{t,t'}$ einschränken, dann verwenden wir für die Einschränkung eines Prozesses $P \subset time \rightarrow M$ auf diese Zeitmengen die Bezeichnung P^t, P_t und $P_{t,t'}$, also $P^t \coloneqq P|T^t, P_t \coloneqq P|T_t$ und $P_{t,t'} \coloneqq P|T_{t,t'}$. Es gilt dann auch $P^t = \{f^t \colon f \in P\}, P_t = \{f_t \colon f \in P\}$ und $P_{t,t'} = \{f_{t,t'} \colon f \in P\}$.

Beispiel 7: Einschränkung Montageprozess
Wir verwenden die Menge T: = {Müller, Meier, ...} und den Wertebereich M: = {Nirwana, Hades, Walhall}. Dann ist ein Beispiel für einen Prozess eine Teilmenge P einer gegebenen Menge *time* von Zeitfunktionen. Wir verwenden den Prozess Montage 1.

[13] Ausgewählte Zeitpunkte wie Beginn/Ende der Schicht, Schichtmodelle als Teilmengen der realen Zeit ... Zweckmäßig nutzen können wir die Einschränkung, wenn wir bspw. in einem Dreischichtbetrieb die einzelnen Schichten isolieren und nur die Frühschicht in einer Zeitfunktion darstellen.

Wertebereich	Nirwana	gelb, rot	rot	rot	gelb	rot	rot	rot	gelb
	Hades	rot	gelb	gelb, rot		gelb, rot		rot	
	Walhall		rot		rot		gelb, rot		rot
Anlieferzeitpunkt		Müller	Meier	Metzger	Maler	Schulze	Schultze	Schmid	Schmied
		Definitionsbereich							

Wir betrachten nur U: = {Metzger, Maler, Schmied} und erhalten die entsprechend eingeschränkten Zeitfunktionen für die rote und die gelbe Farbe.

Das bereits eingeführte Konzept der Phasenmenge legt es nahe, von den Phasen eines Prozesses P zu sprechen. Der Phasenschlauch eines Prozesses besteht aus der Menge aller Phasen, die in mindestens einer Zeitfunktion aus dem Prozess enthalten sind: Es sei P ein Prozess über der Zeitmenge *time* = $(T, \leq, t_0)$ mit Wertebereich M, also $P \subset time \rightarrow M$. Der zum Prozess P gehörige *Phasenschlauch* $P°$ ist definiert als diejenige Teilmenge der Phasenmenge $T \times M$, die gegeben ist durch $P° := \{(t, m): \underset{f \in P}{\exists} (t, m) \in f\}$. P^t heißt die *Vergangenheit* des Prozesses P bezüglich t, P_t die *Zukunft* des Prozesses P bezüglich t und $P_{t,t'}$ das *Intervall* des Prozesses P mit Beginn t und Ende t'.

Wir führen für Prozesse die Konkatenation[14] ein: Es bezeichne P und Q jeweils einen Prozess über *time* = $(T, \leq, t_0)$ mit Wertebereich M, also $P \subset time \rightarrow M$ und $Q \subset time \rightarrow M$. Für ein beliebiges $t \in T$ erklären wir dann das *Konkatenationsprodukt* $P \,{}^{\circ}_{t}\, Q$ von P und Q als den Prozess $P \,{}^{\circ}_{t}\, Q \subset time \rightarrow M$, der gegeben ist durch $P{}^{\circ}_{t}Q := \{f: \underset{p \in P}{\exists} \underset{q \in Q}{\exists} f^t = p^t \wedge f_t = q_t\}$.

Das *direkte Produkt* PQ zweier Prozesse P und Q ist in natürlicher Weise erklärt durch $PQ := \{f: \underset{p \in P}{\exists} \underset{q \in Q}{\exists} f = pq\}$.

Für die folgenden Betrachtungen untersuchen wir Zeitmengen, bei denen jedes Zeitelement eine echte Vergangenheit haben kann. Dementsprechend besitzen die Zeitmengen hier nicht notwendigerweise einen „Anfang“: Mit $\leq$ als vollständiger Ordnungsrelation auf der Menge T nennen wir deshalb bereits $(T, \leq)$ eine *Zeitmenge*. Zur Erklärung verwenden wir den folgenden Sachverhalt: Zwei Werker unterhalten sich über die „guten alten Zeiten“. In

14 Die Definition der Konkatenation ${}^{\circ}_{t}$ von Zeitfunktionen aus *time* → M, die wir oben geben, begrenzt mit dem Kreuzprodukt den Wertebereich für f und g. Vereinbart wird aber die Konkatenation elementweise. $(f, g) \rightarrow f \,{}^{\circ}_{t}\, q$; also spezielle (gegebene) f und spezielle (gegebene) g. Denn sonst wäre es: Wir verknüpfen alle Funktionen eines Prozesses mit allen Funktionen eines anderen Prozesses bei zufällig zwei identischen Wertebereichen. Jetzt verbinden wir eine Zeitfunktion $p \in P$ mit einer Zeitfunktion $q \in Q$. Und machen kein direktes Produkt, sondern eine Konkatenation.

diesem Gespräch ist es möglich, immer noch weiter zurückzugehen, also immer noch kleinere Zeitelemente einzuführen und so beliebig weit in die Vergangenheit zurückzugehen. In die Zukunft gilt das bei $(T, \leq, t_0)$ sowieso. Während wir aber die Zukunft durch „Abwarten“ real beobachten und erleben können, wird das bei vergangenen Ereignissen so nicht mehr möglich sein: Wir reden über die Dinge, wie wir sie erlebt bzw. beobachtet und im Kopf oder in einem (anderen) Datenbestand abgelegt haben.

Alle Begriffe, die wir im Zusammenhang mit der Zeitmenge $(T, \leq, t_0)$ eingeführt haben, können wir in entsprechender Weise für die Zeitmenge $(T, \leq)$ verwenden: *Einschränkung* von $(T, \leq)$ auf eine Menge U; *Zeitfunktion* über $(T, \leq)$, *Prozess* über $(T, \leq)$. Für je zwei Prozesse P, Q über $(T, \leq)$ können wir für beliebiges $t \in T$ deren *Konkatenationsprodukt* $P \overset{\circ}{_t} Q$ durch

$$P \overset{\circ}{_t} Q := \{f \colon \underset{p \in P}{\exists} \ \underset{q \in Q}{\exists} \ f^t = p^t \wedge f_t = q_t\}$$

und deren direktes Produkt PQ durch

$$PQ := \{f \colon \underset{p \in P}{\exists} \ \underset{q \in Q}{\exists} \ f = pq\}$$

erklären.

Für $(T, \leq)$ und ein beliebiges $t \in T$ definieren wir die *Erscheinung* von Q bezüglich der t-Vergangenheit von P durch $P \underset{t}{<} Q := \{f \colon f \in Q \wedge f^t \in P^t\}$[15]. Die *Erscheinungsoperation* $\underset{t}{<}$ ist eine Auswerteoperation: In der t-Vergangenheit stimmen bestimmte Zeitfunktionen $f^t \in P^t$ und bestimmte Zeitfunktionen $f \in Q$ überein. Im speziellen Fall $P = \{p\}$ schreiben wir für die Erscheinung $\{p\} \underset{t}{<} Q$ einfacher $p \underset{t}{<} Q$. Wir dehnen die Betrachtung auf die Zukunft aus:

Für $(T, \leq)$ und beliebige $t \in T$ ist die *Erscheinung* $Q \underset{t}{>} P$ eines Prozesses Q bezüglich der t-Zukunft des Prozesses P gegeben durch $Q \underset{t}{>} P$: $\{f \colon f \in Q \wedge f_t \in P_t\}$. Im speziellen Fall $P = \{p\}$ schreiben wir für $Q \underset{t}{>} \{p\}$ einfacher $Q \underset{t}{>} p$.

---

15 So wie $\underset{t}{\circ}$ der Operator für die Konkatenation ist, so ist $\underset{t}{<}$ der Operator für die Erscheinung. f^t kann eine Menge von Zeitfunktionen sein. Meier verweist auf p', Müller auf p''. $\underset{t}{<}$ ist für ganz P und Q definiert.

Beispiel 8: Erscheinung
Wir definieren als Q

Wertebereich	Nirwana	a		b, c
	Hades	b	a, b	
	Walhall	c	c	a, b
		Meier	Metzger	Maler
		Definitionsbereich		

mit den Zeitfunktionen a, b, c. Als $f \in Q$ wählen wir c und als P nehmen wir

Wertebereich	Nirwana	u, v	w	x, y
	Hades	x	u, v, x	u, v
	Walhall	y, z	y, z	y, z
		Meier	Metzger	Maler
		Definitionsbereich		

Wenn wir jetzt als t Maler wählen, dann liefert $P \underset{t}{<} Q$ die Zeitfunktionen y und z.

– *Zustandsbeschreibung von Prozessen*

Ein *Zustand* $z(t)$ umfasst zu einem bestimmten Zeitpunkt *t* eine bestimmte Teilmenge der Zeitfunktionen aus P. Aus dieser Teilmenge können wir die erforderlichen Kennzahlen bilden. Damit besteht die Möglichkeit, den Prozess gar nicht mehr als Menge P von Zeitfunktionen $p, p \in P$ anzugeben, sondern genau auf die „Zustände“ an einem Zählpunkt abzuheben, indem wir den Fokus auf einzelne Teilmengen aus diesem Prozess richten. Dann muss gewährleistet sein, dass über diese Zustandsdarstellung der gesamte Prozess erfasst wird. Die im folgenden angegebene Darstellung eines Prozesses P über $(T, \leq)$ liefert für jeden Zeitpunkt $t \in T$ eine Überdeckung desselben mit Teilprozessen. Diese Darstellung heißt *Zustandsbeschreibung*. Indem wir von ihr spezielle Eigenschaften verlangen, kommen wir zum Konzept der Darstellung eines Prozesses durch eine „dynamische Maschine“.

Ein geordnetes Paar $\langle P, Z \rangle$ heißt eine *Zustandsbeschreibung* von P: $\leftrightarrow$

- P ist ein Prozess über $(T, \leq)$.
- Z ist eine Menge von Zeitfunktionen $z: T \to \mathcal{P}(P)$ von T in die Potenzmenge von P.
- für jeden Zeitpunkt $t \in T$ bildet das Mengensystem $\{z(t): z \in Z\}$ eine Überdeckung von P. Damit gilt $\underset{t \in T}{\forall} \underset{z \in Z}{\cup} z(t) = P$.

Ist $\langle P, Z \rangle$ eine Zustandsbeschreibung von P, dann heißt jede Zeitfunktion $z \in Z$ eine *Zustandstrajektorie* und jeder Funktionswert $z(t)$ ein *Zustand*.

Die Menge Q mit $Q \coloneqq \{q\colon \underset{z \in Z}{\exists} \underset{t \in T}{\exists} q = z(t)\}$, die alle Zustände von $\langle P, Z \rangle$ enthält, heißt die *Zustandsmenge* dieser Zustandsbeschreibung.

Die Menge Q enthält (völlig unsortiert) als Elemente q alle Zustände $z(t)$. Jetzt partitionieren wir in Teilmengen je Zeitelement $t \in T$ und erhalten:
Für ein beliebiges $t \in T$ sei mit $Q(t)$ die Menge $Q \coloneqq \{q\colon \underset{z \in Z}{\exists} q = z(t)\}$ bezeichnet. $Q(t)$ ist die Menge der von $\langle P, Z \rangle$ zur Zeit t *erreichbaren Zustände*.[16]

Beispiel 9: Wochenablauf der Familie S.[17]
Wir betrachten den Wochenablauf der Familie S. nach Tagen sowie nach den Zeitfunktionen „Persönliche Pflichten“ (PP) und „Freizeit“ (FZ) für jedes Familienmitglied gerastert: $Z \coloneqq \{z_j, z_e, z_t, z_s\}$.

z_j	PP_j	Werk 1	Werk 2	Lackiererei	Montage	Vertrieb	Finanz	Kirchgang
	FZ_j	Sport	Schützenv.	Rotary	Gemeinde	Gesangv.	Familie	Stammtisch
z_e	PP_e	Wäsche	Hausreinigg.	Einkäufe	Garten	Haushalt	Einkäufe	Kirchgang
	FZ_e	Frauenkreis	Kirchengem.	Gesangv.	Kegeln	Schule	Familie	Fernsehen
z_t	PP_t	Schule	Schule	Schule	Schule	Schule	-	Kirchgang
	FZ_t	Sport	Nachhilfe	Singen	Pfadfinder	Sport	Freizeit	Freunde
z_s	PP_s	Schule	Schule	Schule	Schule	Schule	Schule	Kirchgang
	FZ_s	Musik	Musik	Musik	Sport	Leos	Freizeit	Freunde
		Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
		T						

Die Zustandsbeschreibung $\langle P, Z \rangle$ bezieht sich auf einen bestimmten Prozess P. Also haben wir in diesem Beispiel mit einer bestimmten Menge Z auch nur einen Prozess und demzufolge einen Wertebereich. Also müsste hier jede Zeitfunktion auf den gesamten Wertebereich zugreifen können. Also reden wir eigentlich von folgendem:

[16] q ist ein Zustand, der von mindestens einer Zustandstrajektorie zu einem bestimmten Zeitelement angenommen wird.
[17] Wir führen in diesem Beispiel Wochentage ein. Das dient nur der besseren Anschaulichkeit. Selbstverständlich können wir anstelle der Wochentage jede beliebige Zeitmenge verwenden. Genauso könnten wir 4 parallele Montagelinien jeweils in Früh- und Spätschicht zugrunde legen.

Werk 1	+						
Werk 2		+					
Lackiererei			+				
Montage				+			
Vertrieb					+		
Finanz						+	
Kirchgang							+ **x** = $\Vert$
Sport	+ =			$\Vert$	=		
Schützenverein		+					
Rotary			+				
Gemeinderat				+			
Gesangverein			**x**		+		
Familie						+ **x**	
Stammtisch							+
Wäsche	**x**						
Hausreinigung		**x**					
Einkäufe			**x**			**x**	
Garten				**x**			
Haushalt					**x**		
Frauenkreis	**x**						
Kirchengemeinde		**x**					
Kegeln				**x**			
Schule	= $\Vert$	= $\Vert$	= $\Vert$	= $\Vert$	**x** = $\Vert$	$\Vert$	
Fernsehen							**x**
Nachhilfe		=					
Singen			=				
Pfadfinder				=			
Freizeit						= $\Vert$	
Freunde							= $\Vert$
Musik	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$				
Leos					$\Vert$		
	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
	T						

z_j, Julius: Zeitfunktionen + Persönliche Pflichten, + Freizeit
z_e, Ehefrau: Zeitfunktionen **x** Persönliche Pflichten, **x** Freizeit
z_t, Tochter: Zeitfunktionen = Persönliche Pflichten, = Freizeit
z_s, Sohn: Zeitfunktionen $\Vert$ Persönliche Pflichten, $\Vert$ Freizeit
$Z = \{z_j, z_e, z_t, z_s\}$ ist hier nicht von der Zeit abhängig.

$+$ *konkatenationstreu:* $\leftrightarrow \underset{t \in T}{\forall} \ \underset{q \in Q(t)}{\forall} \ q \underset{t}{\circ} q = q$.

q bezeichnet zu einem Zeitpunkt t eine Zeitfunktion $z(t)$, also einen Zustand, der zum Zeitpunkt t Zeitfunktionen p aus P zusammenfasst. Wenn wir von t aus in die Vergangenheit schauen, sehen wir genau die Zeitfunktionen p, die wir für die Festlegung von q bzw. für die Fortsetzung in die Zukunft brauchen: Die Zukunft setzt genau auf den in q enthaltenen Zeitfunktionen auf. Und das für alle in $Q(t)$ enthaltenen $z(t)$. Durch die Kombination der Vergangenheit von q und der Zukunft von q entsteht bei Konkatenationstreue wieder q.

Also entstehen durch die Kombination der Zeitfunktionen $p \in P$ in der Vergangenheit mit den Zeitfunktionen $p' \in P$ in der Zukunft keine Zeitfunktionen p'', die nicht in q enthalten sind. Diese „Konkatenationstreue" von $\langle P, Z \rangle$, also die Abgeschlossenheit bzgl. Konkatenation und damit bzgl. der in q enthaltenen Menge an Zeitfunktionen p, liegt bspw. dann vor, wenn die Zustände q zu jedem Zeitpunkt t

+ nur eine einzige Zeitfunktion p oder
+ nur Zeitfunktionen p mit derselben Vergangenheit[18] oder
+ nur Zeitfunktionen p mit derselben Zukunft[19] oder
+ Mengen von Zeitfunktionen enthalten, mit denen die Vielfalt der durch Konkatenation generierbaren Zeitfunktionen von vornherein gegeben ist.[20]

Beispiel 10: Wochenablauf der Eltern Sandplatz/Konkatenationstreue
Wir betrachten den Wochenablauf von Julius Sandplatz und seiner Ehefrau mit den Zeitfunktionen *PP* und *FZ*.

z_j	PP_j	Werk 1	Werk 2	Lackiererei	Montage	Vertrieb	Finanz	Kirchgang
	FZ_j	Sport	Schützenv.	Rotary	Gemeinde	Gesangv.	Familie	Stammtisch
z_e	PP_e	Wäsche	Hausreinigg.	Einkäufe	Garten	Haushalt	Einkäufe	Kirchgang
	FZ_e	Frauenkreis	Kirchengem.	Gesangv.	Kegeln	Schule	Familie	Fernsehen
		Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag

Konkatenationstreue liegt vor, wenn wir

- jede einzelne Zeitfunktion als Zustand vereinbaren.
- die persönlichen Pflichten und die Freizeit zu einer Zeitfunktion „Julius" bzw. „Ehefrau" mit einem gemeinsamen Wertebereich tageweise zusammenfassen und dafür wieder jeweils einen Zustand vereinbaren.
- die Zeitfunktion „Julius" und „Ehefrau" mit einem gemeinsamen Wertebereich tageweise zu einer Zeitfunktion „Wochenablauf des Ehepaars S." zusammenfassen und dafür einen Zustand vereinbaren.

Keine Konkatenationstreue liegt vor, wenn wir

- festlegen, dass der Zustand Julius die beiden Zeitfunktionen persönliche Pflichten und Freizeit (mit dann unterschiedlichen Wertebereichen) enthält. Dann könnten wir am Donnerstag auch die Vergangenheit der persönlichen Pflichten mit der Zukunft der Freizeit koppeln und würden eine bisher nicht in q enthaltene Zeitfunktion erhalten.

---

[18] Diese Situation liegt bspw. dann vor, wenn ausgehend von einem Verlauf der Istwerte in der Vergangenheit mehrere mögliche Abläufe in der Zukunft durchgespielt werden.

[19] Es gibt bspw. nur einen Plan, auf den sich alle Lieferanten mit Vorlauf und Rückstand wieder einregeln.

[20] Wenn 5 originäre Zeitfunktionen bei 5 Zeitpunkten gegeben sind, dann müssten wir Zeitfunktionen im Voraus vereinbaren, ohne dass wir das wollen und ohne, dass das Sinn macht - nur, um dem Anspruch der Konkatenationstreue formal zu genügen.

\+ *vergangenheitserweiternd:* $\leftrightarrow$ für beliebige $t \in T$ ist die Relation $v(t)$, die definiert ist durch $v(t) := \{\langle p \underset{t}{<} q, q\rangle : q \in Q(t) \wedge p \in q\}$, funktional.

Von einer Zeitfunktion p liege die Vergangenheit bezüglich t vor. Diese Zeitfunktion p sei Element eines Zustandes q, also eine der Zeitfunktionen, die die Zeitfunktion z ausmachen ($q := z(t)$). Außerdem sei q in $Q(t)$ enthalten. Dann ist die Aussage: Die Vergangenheit von p ist zu einem Zeitpunkt t als Zeitfunktion nur diesem q zugeordnet. Zu jedem Zeitpunkt t ist $q \in Q(t)$. Bei Funktionalität kann „vergangenheitserweiternd" von der Erscheinung von q bezüglich p eindeutig auf ein bestimmtes q geschlossen werden.

Beispiel 11: Wochenablauf der Eltern S./vergangenheitserweiternd

z_j	PP_j	Werk 1	Werk 2	Lackiererei	Montage	Vertrieb	Finanz	Kirchgang
	FZ_j	Sport	Schützenv.	Rotary	Gemeinde	Gesangv.	Familie	Stammtisch
z_e	PP_e	Wäsche	Hausreinigg.	Einkäufe	Garten	Haushalt	Einkäufe	Kirchgang
	FZ_e	Frauenkreis	Kirchengem.	Gesangv.	Kegeln	Schule	Familie	Fernsehen
		Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag

Wir wählen ein Beispiel, in dem wir über zwei Zeitfunktionen „PP" (persönliche Pflichten) und „FZ" (Freizeit) zu einem Zustand $z(t)$ kommen. Es liege die Zeitfunktion Sport, Schützenverein, Rotary, Gemeinderat, Gesangverein, Familie als Vergangenheit des Sonntags vor. Dann können wir diese Zeitfunktion eindeutig dem Zustand (Julius) zuordnen. Dieser Zustand ist Element der am Sonntag erreichbaren Zustände. Vergleichbar gilt für die Zeitfunktion Frauenkreis, Kirchengemeinde, Gesang, Kegeln, Schule zum Zeitpunkt Samstag die Zuordnung zu (Ehefrau). Wenn wir alles zu diesen Zuständen und deren Vergangenheit wissen wollen, können wir dazu die jeweils andere Zeitfunktion „nachschauen".

\+ *vergangenheitsdeterminierend*: $\leftrightarrow \underset{t \in T}{\forall} \; \underset{q \in Q(t)}{\forall} \; p, \overline{p} \in q \rightarrow p^t = \overline{p}^t$.

Zwei Zeitfunktionen $p, \overline{p}$ seien Bestandteil eines beliebigen Zustands q zum Zeitpunkt t. Dann bezeichnen bei der Eigenschaft „vergangenheitsdeterminierend" diese beiden Zeitfunktionen $p, \overline{p}$ dieselbe Vergangenheit. p und $\overline{p}$ führen also über denselben und einzigen Weg zu q. Da diese Aussage - „rekursiv" - über alle Zeitpunkte aus T getroffen wird, heißt das zu jedem Zeitpunkt: q besteht aus nur einem Element p. Und q kann nicht wie bei vergangenheitserweiternd aus mehreren Zeitfunktionen bestehen. Damit trifft „vergangenheitsterminierend" die folgende Aussage: Ein Zustand ist mit seiner Vergangenheit bereits vollständig beschrieben, wenn zum Zeitpunkt t eine Zeitfunktion p mit ihrer Vergangenheit vorliegt. Dieser Satz lautet für „vergangenheitserweiternd": Eine Zeitfunktion p, die zu einem Zeitpunkt t einem Zustand q zugeordnet ist, ist bei der Eigenschaft „vergangenheitserweiternd" in der gesamten Vergangenheit von t nur diesem Zustand q zugeordnet. Im ersten Fall ist also q vollständig beschrieben, im zweiten Fall nur vollständig identifiziert.

Beispiel 12: Wochenablauf Ehepaar S./vergangenheitsterminierend
Wir modifizieren das Beispiel: Eine einzelne Zeitfunktion bilde jetzt bereits einen Zustand. Hier ist dann mit einer Zeitfunktion ein Zustand komplett beschrieben. Also ist jede der vier Zeitfunktionen vergangenheitsdetermi-nierend.

z_{j1}	PP_j	Werk 1	Werk 2	Lackiererei	Montage	Vertrieb	Finanz	Kirchgang
z_{j2}	FZ_j	Sport	Schützenv.	Rotary	Gemeinde	Gesangv.	Familie	Stammtisch
z_{e1}	PP_e	Wäsche	Hausreinigg.	Einkäufe	Garten	Haushalt	Einkäufe	Kirchgang
z_{e2}	FZ_e	Frauenkreis	Kirchengem.	Gesangv.	Kegeln	Schule	Familie	Fernsehen
		Montag	Dienstag	Mittwoch	Donerstag	Freitag	Samstag	Sonntag

Wir modifizieren wie folgt:

z_j	PP_j	Werk 1	Werk 2	Lackiererei	Montage	Vertrieb	Finanz	Kirchgang
	FZ	Frauenkreis	Kirchengem.	Gesang	Kegeln	Schule	Familie	Familie
z_e	PP_e	Wäsche	Hausreinigg.	Einkäufe	Garten	Haushalt	Einkäufe	Kirchgang
	FZ	Frauenkreis	Kirchengem.	Gesang	Kegeln	Schule	Familie	Familie
		Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag

Zwei unterschiedliche Beobachter, denen hier jeweils die Zeitfunktion *FZ* vorliegt, können jetzt in einem gemeinsamen Gespräch über diese Zeitfunktion diese gedanklich entweder bei Julius S. oder bei seiner Ehefrau einordnen. Jeder zieht seine eigenen Schlüsse, die der jeweils andere nicht versteht. Nach einer halben Stunde gelingt es, das Missverständnis aufzudecken: Die Zustandsbeschreibung ist nicht vergangenheitsdeterminierend und nicht vergangenheitserweiternd.

\+ *überführend:* $\leftrightarrow$ für alle $t, t' \in T$ mit $t \leq t'$ ist die Relation $\ddot{u}(t, t')$, die definiert ist durch

$$\ddot{u}(t,t') \coloneqq \{\langle(q,s)\rangle, q' : q \in Q(t) \land q' \in Q(t') \land \underset{p \in q \cap q'}{\exists} s = p_{t,t'},$$

$$\text{funktional} \land {}_1\ddot{u}(t,t') = \{(q,s) : q \in Q(t) \land s \in q_{t,t'}\}\,.$$

Der erste Teil der Aussage heißt: Wir verbinden zwei Zustände q und q' über eine Zeitfunktion *s*. Dabei ist $q \in Q(t)$ und $q' \in Q(t')$ und s das Intervall von t bis t' einer Zeitfunktion p, die in q und q' enthalten ist. Und weil $Q(t)$ und $Q`(t)$ mehrere unterschiedliche Zustände q bzw. q' enthalten, ist $\ddot{u}(t, t')$ eine Menge solcher Zeitfunktionen s. Diese Menge ist funktional: s verbindet neben q und q' nicht q und q''

Die zweite Aussage heißt: Bei „überführend" gilt für den Vorbereich q und s von $\langle(q, s), q'\rangle$: Wenn wir mit q und s bei t starten, dann ist die Zeitfunktion s Element von $Q(t)$ und aller Zustände $q_{t,t'}$, die sich von t bis t' einstellen.

Beispiel 13: Wochenablauf der Eltern Sandplatz/überführend

z_j	PP_j	Werk 1	Werk 2	Lackiererei	Montage	Vertrieb	Finanz	Kirchgang
	FZ_j	Sport	Schützenv.	Rotary	Gemeinde	Gesangv.	Familie	Stammtisch
z_e	PP_e	Wäsche	Hausreinigg.	Einkäufe	Garten	Haushalt	Einkäufe	Kirchgang
	FZ_e	Frauenkreis	Kirchengem.	Gesangv.	Kegeln	Schule	Familie	Fernsehen
		Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag

Wir verwenden (Julius, PP_j, FZ_j) als Zustand q. Wir stehen am Montag und wollen wissen, was Julius am Sonntag tut/vorhat. Dann haben wir zwei Zeitfunktionen PP_j und FZ_j, ausgehend vom Zustand am Montag. In diesem Fall sind q und q' identisch. PP_j und FZ_j sind Elemente des Gesamtprozesses „Familie S." und zu jedem Zeitpunkt als q im jeweiligen $Q(t)$ vertreten.

Es gilt das Gesetz: Eine vergangenheitsdeterminierende Zustands-beschreibung $\langle P, Z\rangle$ ist auch konkatenationstreu und vergangenheits-erweiternd. Den Beweis führen wir wie folgt: Bei einer vergangenheitsdeterminierenden Zustandsbeschreibung besteht jede t-Vergangenheit q^t eines Zustandes $q \in Q(t)$ aus einem einzigen Element. Deshalb gilt $q \underset{t}{\circ} q = q$ (konkatenationstreu). Außerdem gilt für $p \in q$ stets $p \underset{t}{<} q = q$, so dass die Relation v die Identität auf $Q(t)$ darstellt und daher auch funktional ist (vergangenheitserweiternd).
Mit den eingeführten Eigenschaften definieren wir den Begriff einer „dynamischen" Zustandsbeschreibung $\langle P, Z\rangle$. Dazu verlangen wir:

1. $p, \overline{p} \in P$ seien zwei im Zustand $q \in Q(t)$ mögliche Zeitfunktionen des Prozesses P (es gilt also $p, \overline{p} \in q$). Dann soll die t-Zukunft der zugehörigen Erscheinungen $p \underset{t}{<} q$ und $\overline{p} \underset{t}{<} q$ stets gleich sein. Demnach hat der Prozess bei p und $\overline{p}$ im Zustand q von der Zeit t an „die gleiche Gestalt".[21]
2. Von jeder Erscheinung $p \underset{t}{<} q$ mit $p \in q$ können wir eindeutig auf den Zustand q schließen. Mit $p \underset{t}{<} q$ ist dann auch eindeutig die „Historie" q^t des Zustandes q gegeben.
3. Mit der Kenntnis von q mit $q \in Q(t)$ und $p_{t,t'}$ mit $p_{t,t'} \in q_{t,t'}$ kann eindeutig auf den Nachfolgezustand q' mit $q' \in Q(t')$ und $p_{t,t'} \in {q'}_{t,t'}$ geschlossen werden.

Diese Anforderungen an $\langle P, Z\rangle$ werden genau durch die Eigenschaften „konkatenationstreu", „vergangenheitserweiternd" und „überführend" gesichert. Wir kommen damit zu folgender Definition: Eine Zustandsbeschreibung $\langle P, Z\rangle$ eines Prozesses P heißt *dynamisch*:

[21] Also haben wir wie vorher angesprochen für mehrere Zeitfunktionen in der Vergangenheit nur eine Zeitfunktion in der Zukunft.

$\leftrightarrow \langle P, Z\rangle$ ist konkatenationstreu $\wedge \langle P, Z\rangle$ ist vergangenheitserweiternd $\wedge \langle P, Z\rangle$ ist überführend.[22]

Beispiel 14: Familie S.
Wir betrachten den Wochenablauf der Familie S. nach Tagen sowie nach den Zeitfunktionen „Persönliche Pflichten" und „Freizeit" für jedes Familienmitglied gerastert: $Z \coloneqq \{PP_j, FZ_j, PP_e, FZ_e, PP_t, FZ_t, PP_s, FZ_s\}$.

PP_j	Werk 1	Werk 2	Lackiererei	Montage	Vertrieb	Finanz	Kirchgang
FZ_j	Sport	Schützenv.	Rotary	Gemeinde	Gesangv.	Familie	Stammtisch
PP_e	Wäsche	Hausreinigg.	Einkäufe	Garten	Haushalt	Einkäufe	Kirchgang
FZ_e	Frauenkreis	Kirchengem.	Gesangv.	Kegeln	Schule	Familie	Fernsehen
PP_t	Schule	Schule	Schule	Schule	Schule	-	Kirchgang
FZ_t	Sport	Nachhilfe	Singen	Pfadfinder	Sport	Freizeit	Freunde
PP_s	Schule	Schule	Schule	Schule	Schule	Schule	Kirchgang
FZ_s	Musik	Musik	Musik	Sport	Leos	Freizeit	Freunde
	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag

Diese Zustandsbeschreibung ist

- konkatenationstreu
  Für jeden Zeitpunkt gilt: Die Zeitfunktionen der Vergangenheit sind die Zeitfunktionen der Zukunft.
- vergangenheitserweiternd
  Jede Zeitfunktion lässt eindeutig auf den zugeordneten Zustand schließen.
- überführend
  Wir überführen bspw. den Zustand PP_j vom Montag zum Sonntag mit der Überführungsfunktion: PP_j (Montag) = PP_j (Dienstag) = ... = PP_j (Sonntag).

PP_j	Werk 1	Werk 2	Lackiererei	Montage	Vertrieb	Finanz	Kirchgang
FZ_j	Sport	Schützenv.	Rotary	Gemeinde	Gesangv.	Familie	Stammtisch
	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag

22 Wir verstehen diese Anforderungen als den Anspruch an einen bestmöglich strukturierten Prozess:

- konkatenationstreu: Zu jedem Zeitpunkt wird die Vergangenheit eines Zustands (f^t, g^t) eineindeutig der Zukunft (f_t, g_t) eines Zustands zugeordnet und es entstehen die Zeitfunktionen eines Zustands: $q = \{f, g\} \leftrightarrow$ Ein Zustand/Zeitpunkt verbindet Zeitfunktionen.
- vergangenheitserweiternd: Die Vergangenheit einer Zeitfunktion ist nur einem Zustand zugeordnet. Die Zustände eines Zeitpunkts werden entzerrt.
- überführend: Mindestens eine Zeitfunktion
  - verbindet zwei Zeitpunkte mit unterschiedlichen Zuständen funktional $(p \in q \cap q')$
  - verknüpft beginnend mit $Q(t)$ alle Zustände auf dem Weg von q nach q'.

– *Zustandsformen*

Wir beginnen mit der feinsten Zustandsbeschreibung; jede einzelne Zeitfunktion eines Prozesses P bildet einen Zustand z Die *feinste Zustandsbeschreibung* $\langle P, Z_0 \rangle$ eines Prozesses P definieren wir durch $Z_0 \coloneqq \{z\colon \underset{p \in P}{\exists} \underset{t \in T}{\forall} z(t) = \{p\}\}$. Ihre Zustandsmenge Q_0 ist mit $Q_0 = \{\{p\}\colon p \in P\}$ gegeben.

Beispiel 15: Lagerzugang Fahrradgabel/Feinste Zustandsbeschreibung
Gegeben sei der Zugang eines Lagers mit 10 unterschiedlichen Gegenständen. Wir betrachten ab dem Startzeitpunkt (bspw. dem Inventurtermin oder dem Beginn der laufenden Woche mit t als dem jeweiligen Heute-Termin) die Zugangsfortschrittszahl (auf dem „Bildschirm") für jeden einzelnen Gegenstand getrennt. Wir stellen keine Querbetrachtungen zwischen den Zeitfunktionen dieses Zugangsprozesses an.

Lagerzugang: Zugriff auf Fahrradgabel A Fortschrittszahl ab Beginn laufende Woche					
Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa
100	200	300	400	500	550

Demnach haben wir „Bildschirmseiten" für die Fahrradgabeln A, B, C, D, E, F, G, H, I, J mit jeweils einer Zeile.

Wir betrachten damit jede Zeitfunktion p des Prozesses P für sich isoliert. An diese Zeitfunktion stellen wir sonst keine Anforderung: Es gibt in die Vergangenheit/in die Zukunft von t für einen Zustand nur eine einzige Zeitfunktion. Das „feinste" könnten wir so interpretieren: Noch detaillierter geht es nicht. Und noch weniger aufbereitet/eingeschränkt auch nicht: Wir betrachten ja in einem Zustand nur eine Zeitfunktion.

Es gilt das Gesetz: Die feinste Zustandsbeschreibung $\langle P, Z_0 \rangle$ ist dynamisch. Für einen Beweis (siehe Pichler 1975) haben wir zu zeigen, dass $\langle P, Z_0 \rangle$ vergangenheitserweiternd, konkatenationstreu und überführend ist: Über der gesamten Zeitmenge T ist ein Zustand $z(t)$ konstant als Zeitfunktion p vereinbart. Also ist das zu jedem Zeitpunkt in der Vergangenheit und in der Zukunft dieselbe Zustandstrajektorie. Die Zuordnung der Vergangenheit zu einem Zustand ist funktional, denn es gibt nur einen Zustand, der die Zeitfunktion p enthält. Und von jedem Zeitpunkt aus geht es mit p bis t' weiter.

Als Gegenposition zu dieser feinsten Zustandsbeschreibung betrachten wir zu jedem Zeitpunkt als Zustand den kompletten Prozess:[23]
Die *gröbste Zustandsbeschreibung* $\langle P, Z_1 \rangle$ eines Prozesses P ist definiert durch $Z_1 := \{z\colon \underset{t \in T}{\forall} \; z(t) = P\}$. Ihre Zustandsmenge Q_1 ist gegeben durch $Q_1 = \{P\}$.

Beispiel 16: Lagerzugang Fahrradgabel/Gröbste Zustandsbeschreibung

Gegeben sei wieder der Zugang eines Lagers mit 10 unterschiedlichen Gegenständen. Für jeden Gegenstand führen wir die Zugangsfortschrittszahl. Im Gegensatz zur feinsten Betrachtung, bei der wir eine Aussage zur Fahrradgabel A und eine eigenständige zur Fahrradgabel B treffen, gibt es hier nur eine Aussage zum gesamten Prozess: Zugang von Fahrradgabeln, und wenn uns Fahrradgabel A interessiert, müssen wir hier (auf dem „Bildschirm“) auch alle anderen 9 Fahrradgabeltypen von B bis J anschauen, auch wenn uns ggf. diese Zahlen nicht interessieren. Aber es stehen für Querauswertungen alle Zugangsfortschrittszahlen-Reihen ständig zur Verfügung.

Lagerzugang: Zugriff auf Fahrradgabel A
Fortschrittszahl ab Beginn laufende Woche

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa
A	100	200	300	400	500	550
B	100	200	300	400	500	550
C	110	220	330	440	550	600
D						
E						
…						
J						

Ggf. gilt auch hier das Gesetz: Die gröbste Zustandsbeschreibung $\langle P, Z_1 \rangle$ ist dynamisch.[24]
Wir beweisen wie folgt: Die gröbste Zustandsbeschreibung $\langle P, Z_1 \rangle$ ist vergangenheitserweiternd und überführend, wenn der Prozess P gegenüber Konkatenation abgeschlossen ist, also stets $P \underset{t}{\circ} P = P$ gilt[25]; $z(t)$ hat alle Zeitfunktionen und damit gibt es nur einen Zustand $z(t)$. Jede Zeitfunktion aus dem Prozess P ist genau diesem Zustand zugeordnet.

---

23 Herr A sagt: Ich mache eine Zustandsbeschreibung für den Prozess, den ich zu beschreiben/zu beobachten habe. Und dann verwendet er immer nur die eine Zeitfunktion. Herr B ist genauso ungeschickt: Er nimmt immer alle Zeitfunktionen mit ihrem Definitionsbereich. In beiden Fällen heißt das: Wir haben keine Zusammenhänge erkannt. Dies gilt in besonderem Maße für die gröbste Zustandsbeschreibung. Die feinste Zustandsbeschreibung kann ggf. noch eine bewusste Entscheidung für eine bestimmte Zeitfunktion sein. Aber die schauen wir immer an - nicht: Montag bis Freitag sind Zeitfunktionen a und b, am Samstag c + d, am Sonntag e, f und g relevant. Vielmehr sagen wir zu jedem Zeitpunkt dasselbe - ohne Selektion.

24 Nur wenn die im Beweis (Pichler 1975) genannte Einschränkung gilt: Es gibt in der Vergangenheit und/oder in der Zukunft nur eine Zeitfunktion $z(t)$ und in $z(t)$ nur eine Zeitfunktion p

25 Also hat bspw. die Zukunft bei einer Rückwärtsrechnung auch keine unzulässige Zeitverschiebung: Die Vergangenheit bei *t* rechnet mit einem Monat zu 4 Wochen à 5 Tagen, die Rückwärtsrechnung fängt mit dem 30. April an. Konkatenationstreue liegt bspw. vor, wenn zu jedem Zeitpunkt alle möglichen Kombinationen Vergangenheit-Zukunft im Zustand enthalten sind.

Wir wählen als Zustand $z(t)$ eine einzelne Zeitfunktion p. Diese Zeitfunktion ist Element des Prozesses P. Wir betrachten sie zu jedem Zeitpunkt - also bis hierher wie die feinste Beschreibung. Jetzt verlangt die feinste Zustandsbeschreibung: $z(t) = \{p\}$. Hier wählen wir dagegen $z(t) = p \underset{t}{<} P$. Wir betrachten zum Zeitpunkt t alle Zeitfunktionen aus P, deren Vergangenheit so aussieht wie die Vergangenheit von p bezüglich t - also alle Zeitfunktionen mit derselben Vergangenheit, und fassen sie zu einem Zustand zusammen: Die *natürliche Zustandsbeschreibung* $\langle P, \tilde{Z} \rangle$ eines Prozesses P ist definiert durch $Z := \{z\colon \underset{p \in P}{\exists} \underset{t \in T}{\forall} z(t) = p \underset{t}{<} P\}$. Jeder Zustand der natürlichen Zustandsbeschreibung ist eine Erscheinung des Prozesses P bezüglich einer Prozesszeitfunktion p.[26]

Beispiel 17: Lagerzugang Fahrradgabel/Natürliche Zustandsbeschreibung
Wir betrachten den Zugang eines Lagers mit 10 unterschiedlichen Fahrradgabeltypen. Alle sollen dieselbe Zeitfunktion als Zugangsfortschrittszahl realisieren. Wir starten wieder mit einem beliebigen Zeitpunkt, an dem wir alle Fortschrittszahlen auf „0“ gesetzt haben. Dann sieht am Anfang unsere Zustandsbeschreibung so aus: Eine einzige Bildschirmseite, auf der steht „Zugang Fahrradgabeln - Planverlauf“ mit der Auflistung der 10 Gabeltypen A, B, ..., I, J und einer einzigen Zahlenreihe: Fortschrittszahl ab Start, gültig für alle Typen

Lagerzugang: Fahrradgabeln						
Fortschrittszahl ab Beginn laufende Woche						
Betroffene Fahrradgabeltypen: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J						
	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa
	100	200	300	400	500	550

und am Dienstag erhalten wir bspw.

Lagerzugang: Fahrradgabeln						
Fortschrittszahl ab Beginn laufende Woche						
Betroffene Fahrradgabeltypen: B, D, E, G, H, I, J						
	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa
	100	200	300	400	500	550
Lagerzugang: Fahrradgabel A, C						
Fortschrittszahl ab Beginn laufende Woche						
	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa
	110	210	310	410	510	560
Lagerzugang: Fahrradgabel F						
Fortschrittszahl ab Beginn laufende Woche						
	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa
	90	190	290	390	490	540

[26] Für jede der unterschiedlichen Vergangenheiten wird ein Zustand vereinbart.

Also starten wir am Anfang mit einer gemeinsamen Zeitfunktion, die für alle Fahrradgabeln gilt. Und dann brechen wir die Betrachtung auf, wenn die Vergangenheit nicht mehr dieselbe ist. Natürlich können wir aus der Kenntnis von *P* und der feinsten Zustandsbeschreibung die natürliche generieren, in dem wir für jeden Zeitpunkt generieren. Aber die natürliche Zustandsbeschreibung hat diese Auswertung schon gemacht. „Natürlich" heißt dann: Wir definieren so viele Zustände, wie wir unterschiedliche Vergangenheiten haben. Und mehr als die Anzahl der Zeitfunktionen können wir nicht haben...

Beispiel 18: Familie S./Aufspalten einer gemeinsamen Vergangenheit

Als Prozess haben wir gegeben:

Z	Z_j	PP	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1
		FZ	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1
	Z_e	PP	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk1	Rotary
		FZ	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Kegeln	Kegeln
	Z_t	PP	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Kirche	Kirche	Kirche
		FZ	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Familie	Familie	Familie	Familie
	Z_s	PP	Werk 1	Werk 1	Schule	Schule	Schule	Schule	Schule
		FZ	Werk 1	Gesang	Gesang	Gesang	Gesang	Gesang	Gesang
			Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag

Am Montagabend haben wir nur einen Zustand. Am Dienstagabend sind es hier zwei Zustände; der zusätzliche Zustand entsteht über das Freizeitverhalten des Sohnes. Dessen Schulbesuch bewirkt einen dritten Zustand für den Mittwochabend. Am Sonntagabend hat dann jeder seine eigenen Zustände, mit Ausnahme von Julius S. jeder zwei.
Am Anfang haben alle eine gemeinsame „Bildschirm-Seite", am Ende jeder seine eigene. Das kann sich - anders als hier - schneller oder langsamer abspielen.

Werk 1	Gesang	Gesang	Gesang			
Werk 1	Gesang	Gesang	Kegeln			
Werk 1	Gesang	Rotary	Rotary			
Werk 1	Gesang	Rotary	Familie			
Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1			
Werk 1	Werk 1	Werk 1	Kirche			
Werk 1	Werk 1	Schule	Schule			
Werk 1	Werk 1	Schule	Pfadfinder			

Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1		
Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1		
Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1		
Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1		
Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1		
Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1	Werk 1		
Werk 1	Werk 1	Werk 1	Schule	Schule		
Werk 1	Gesang	Gesang	Gesang	Gesang		

Es gilt das Gesetz: Die natürliche Zustandsbeschreibung $\langle P, \tilde{Z} \rangle$ eines Prozesses P ist dynamisch. Den Beweis geben wir wie folgt: Die natürliche Zustandsbeschreibung $\langle P, \tilde{Z} \rangle$ ist vergangenheitsdeterminierend und deshalb auch konkatenationstreu und vergangenheitserweiternd. Darüber hinaus ist die natürliche Zustandsbeschreibung $\langle P, \tilde{Z} \rangle$ auch überführend: Für $t \leq t'$ und $p \in q \cap q'$ mit $q \in \tilde{Q}(t)$ und $q' \in \tilde{Q}(t')$ ist durch q und $p_{t,t'}$ der Zustand q' eindeutig bestimmt durch $q' = p_{t'} < P$.

Die reduzierte Zustandsbeschreibung nimmt eine bestimmte Zusammenfassung von Zeitfunktionen $\overline{p}$ vor: Wir vergleichen Zeitfunktionen $\overline{p}$ mit einer gegebenen Zeitfunktion p und fassen (unterschiedliche) Vergangenheiten zum Zustand $z(t)$ zusammen, wenn die t -Zukunft von p und $\overline{p}$ identisch ist: Die *reduzierte Zustandsbeschreibung* $\langle P, \bar{\bar{\bar{Z}}} \rangle$ eines Prozesses P ist definiert durch $\bar{\bar{\bar{Z}}} := \{z: \underset{p \in P}{\exists} \underset{t \in T}{\forall} z(t) = \{\overline{p}: \overline{p} \in P \wedge (\overline{p} \underset{t}{<} P)_t = (p \underset{t}{<} P)_t\}\}$. Ihre Zustände werden jeweils durch die Menge aller derjenigen Zeitfunktionen $p \in P$ gebildet, bei denen die auf sie bezogenen Erscheinungen $p \underset{t}{<} P$ des Prozesses P gleiche t -Zukunft haben.[27]

Beispiel 19: Lagerzugang Fahrradgabel/Reduzierte Zustandsbeschreibung

Wir betrachten wieder den Lagerzugang der Fahrradgabeln: Wir fassen unterschiedliche Vergangenheiten zusammen, wenn sie dieselbe Zukunft haben. Und in der Vergangenheit sortieren wir auch noch:

Lagerzugang: Fahrradgabeln				
Fortschrittszahl ab Beginn laufende Woche				
Betroffene Fahrradgabeln: A, B, C, D, E, G				
Vergangenheit 1	Mo	Di	Mi	
	90	190	310	Fahrradgabeln A, C, E, G
Vergangenheit 2	Mo	Di	Mi	
	110	210	310	Fahrradgabeln B, D
Zukunft	Do	Fr	Sa	
	400	500	550	

27 Wir eliminieren Redundanzen in der Vergangenheit von t; dann fassen wir die Vergangenheiten nach identischen Zukünften zusammen. Die reduzierte Zustandsbeschreibung kann als der „Quotient" von $\langle P, \tilde{Z} \rangle$ bezüglich der „Nerode-Äquivalenz" angesehen werden, die gegeben ist durch die Zeitfunktion: .Wir betrachten Zeitfunktionen p *u*nd vergleichen diese. Wenn sie eine identische Zukunft besitzen, fassen wir sie zu einem Prozess zusammen - wir zeigen sie gemeinsam auf dem „Bildschirm". Da jeweils zwei Zeitfunktionen miteinander verglichen werden, vergleichen wir hier als Funktionswerte unmittelbare Aussagen zum Produktionsgeschehen.

Es gilt auch hier: Die reduzierte Zustandsbeschreibung $\langle P, \bar{\bar{\bar{Z}}} \rangle$ eines Prozesses P ist dynamisch. Den Beweis führen wir wie folgt: Es sei $p : \overline{p} \in q$ mit $q \in \bar{\bar{\bar{Q}}}(t)$ (mit $\bar{\bar{\bar{Q}}}(t)$ ist dabei die Menge der in $\langle P, \bar{\bar{\bar{Z}}} \rangle$ zur Zeit t erreichbaren Zustände bezeichnet). Wegen $(p \underset{t}{<} P)_t = (\overline{p} \underset{t}{<} P)_t$ gilt dann auch $p \underset{t}{\circ} \overline{p} \in q$. Die reduzierte Zustandsbeschreibung $\langle P, \bar{\bar{\bar{Z}}} \rangle$ ist demnach konkatenationstreu. Sie ist vergangenheitserweiternd, denn für $p \in q$ gilt $p \underset{t}{<} q = p \underset{t}{<} P$, und q ist damit eindeutig bestimmt. $\langle P, \bar{\bar{\bar{Z}}} \rangle$ ist überführend, denn für $t \leq t'$ und $p \in q \cap q'$ mit $q \in \bar{\bar{\bar{Q}}}(t)$ und $q' \in \bar{\bar{\bar{Q}}}(t')$ ist mit q und $p_{t,t'}$ der Zustand q' eindeutig bestimmt durch $q' = \{\overline{p} : \overline{p} \in P \wedge (\overline{p} \underset{t'}{<} P)_{t'} = (p \underset{t'}{<} P)_{t'}\}$.

– *Konstruierbarkeit und Rekonstruierbarkeit*

Wir untersuchen die Relation $\langle q^t, q \rangle$: Gegeben ist die Vergangenheit von q (und damit alle zugehörigen p); der Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt ist zu konstruieren: $q = z(t)$. Dazu sind mit q^t die Zeitfunktionen gegeben, die für q in der Vergangenheit relevant waren. Daraus folgt: Wenn die Vergangenheit von q auf genau ein $q, q \in Q(t)$ zielt[28], dann heißt eine Zustandsbeschreibung $\langle P, Z \rangle$ eines Prozesses P
konstruierbar: $\leftrightarrow$ die Relation $\kappa(t)$, die definiert ist durch
$\kappa(t) = \{\langle q^t, q \rangle : q \in Q(t)\}$, ist für beliebige $t \in T$ funktional.

Beispiel 20: Konstruierbare Lackierreihenfolge
Wir fassen 7 Lackierreihenfolgen in 2 Vergangenheiten zusammen:

q_1^t = {Reihenfolge 1, Reihenfolge 2, Reihenfolge 3},
q_2^t = {Reihenfolge 4, Reihenfolge 5, Reihenfolge 6, Reihenfolge 7}.

Wir stehen im Moment vor Slot 21 und wollen den Prozess für Slot 21 bis Slot 24 konstruieren.

---

28 Wir stehen mit unserem Prozess unmittelbar vor t. Wir können auf die Vergangenheit von t, also auf den Prozess P von t_0 bis zum Zeitelement unmittelbar vor t zugreifen. Wir haben diese Vergangenheit nach einzelnen Zuständen gruppiert, also Zeitfunktionen zusammengefasst. Dann gibt es bei Funktionalität für eine bestimmte Vergangenheit eines Zustands nur einen Zustand q, der zum Zeitpunkt t dieser Vergangenheit zugeordnet wird. Also können wir den Prozess ausgehend von t_0 in einem eindeutigen Pfad durchlaufen. Wir betrachten dazu q und q^t. q und q^t liegen Zeitfunktionen zugrunde, die ihrerseits Zeitfunktionen zusammenfassen. Wir betrachten beispielsweise die Zeitfunktionen p' = Ausschuss, p'' = Storno und p''' = Reklamationen. Dann umfasst $z(t)$ zu einem Zeitpunkt Ausschuss und Storno, zu einem anderen Storno und Reklamationen, zu einem dritten Zeitpunkt Ausschuss, Storno und Reklamationen. Also müssen wir zum einen Vergangenheiten von z unterscheiden können und diese einer festzulegenden Ausprägung zum Zeitpunkt t eindeutig zuordnen. Das ist dann bspw. $q = \{p', p'''\}$.

Fall a)

		Slot																							
Reihenfolge		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	Fahrradtyp	b	b	c	b	a	a	c	b	d	e	f	f	b	b	f	e	e	f	g	e	b	b	e	b
	Farbe	4	1	2	5	2	3	3	4	4	1	5	2	5	2	5	2	4	1	5	2	2	3	3	4
2	Fahrradtyp	a	b	e	b	a	d	f	f	a	a	c	b	a	a	c	b	a	a	c	b	b	b	c	b
	Farbe	5	2	5	2	2	3	3	4	2	3	3	4	2	3	3	4	2	3	3	4	5	2	5	2
3	Fahrradtyp	a	b	c	b	a	a	c	b	d	e	f	f	d	e	f	f	e	f	g	e	b	b	c	b
	Farbe	4	1	2	5	4	1	5	2	4	1	5	2	4	1	5	2	4	1	5	2	4	1	5	2
4	Fahrradtyp	a	b	c	b	a	a	c	b	d	e	f	f	b	b	f	e	b	b	f	e	b	b	f	e
	Farbe	5	2	5	2	2	3	1	2	2	3	1	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	2
5	Fahrradtyp	a	d	f	f	a	a	c	b	d	e	f	f	d	e	f	f	e	f	g	e	b	b	c	b
	Farbe	2	3	4	4	4	1	5	2	2	3	1	2	2	3	1	2	4	1	5	2	4	1	5	2
6	Fahrradtyp	a	b	c	b	a	a	c	b	d	e	f	f	d	e	f	f	e	f	g	e	b	b	c	b
	Farbe	4	1	2	5	4	1	5	2	4	1	5	2	4	1	5	2	4	1	5	2	5	2	5	2
7	Fahrradtyp	a	b	c	b	a	d	f	f	a	d	f	f	b	b	f	e	e	f	g	e	b	b	c	b
	Farbe	4	1	2	5	2	3	3	4	2	3	3	4	5	2	5	2	4	1	5	2	2	3	3	4
		Schicht 1								Schicht 2								Schicht 3							

Es gibt für den ersten Zustand q_1^t und den zweiten Zustand q_2^t jeweils eine Fortsetzung q. Die Vorschrift $\langle q^t, q \rangle$ heißt: „Wähle das einzig mögliche q, das q^t zugeordnet ist". Gleich wirksam wäre: „Wähle irgendein q, das q^t zugeordnet ist". Oder: „Setze mit den bisher zugeordneten Reihenfolgen fort".

Fall b)

Wir definieren für beide Zustände mehrere mögliche Fortsetzungen.

		Slot																			
Reihenfolge		1	2	3	4	5	6	7	8	21	22	23	24	21	22	23	24	21	22	23	24
1	Fahrradtyp	b	b	c	b	a	a	c	b	a	b	c	b	a	a	c	b	d	e	f	f
	Farbe	4	1	2	5	2	3	3	4	4	1	2	5	2	3	3	4	4	1	5	2
2	Fahrradtyp	a	b	e	b	a	d	f	f	a	b	e	b	a	d	f	f	a	a	c	b
	Farbe	5	2	5	2	2	3	3	4	5	2	5	2	2	3	3	4	2	3	3	4
3	Fahrradtyp	a	b	c	b	a	a	c	b	a	b	c	b	a	a	c	b	d	e	f	f
	Farbe	4	1	2	5	4	1	5	2	4	1	2	5	4	1	5	2	4	1	5	2
4	Fahrradtyp	a	b	c	b	a	a	c	b	a	b	c	b	a	a	c	b	d	e	f	f
	Farbe	5	2	5	2	2	3	1	2	5	2	5	2	2	3	1	2	2	3	1	2
5	Fahrradtyp	a	d	f	f	a	a	c	b	a	d	f	f	a	a	c	b	d	e	f	f
	Farbe	2	3	4	4	4	1	5	2	2	3	4	4	4	1	5	2	2	3	1	2
6	Fahrradtyp	a	b	c	b	a	a	c	b	a	b	c	b	a	a	c	b	d	e	f	f
	Farbe	4	1	2	5	4	1	5	2	4	1	2	5	4	1	5	2	4	1	5	2
7	Fahrradtyp	a	b	c	b	a	d	f	f	a	b	c	b	a	d	f	f	a	d	f	f
	Farbe	4	1	2	5	2	3	3	4	4	1	2	5	2	3	3	4	2	3	3	4
		Schicht 1								Schicht 3											

Wir verwenden als $\langle q^t, q\rangle$ die Vorschrift: „Wähle für jede Vergangenheit q^t aus den möglichen Zuständen q den mit den meisten zu lackierenden Herrenrädern (a)“. In diesem Fall erhalten wir eine eindeutige Entscheidung. Wenn wir die Vorschrift: „Wähle für jede der beiden Vergangenheiten q^t aus den möglichen zugeordneten Zuständen den mit den meisten zu lackierenden Damenrädern (c)“ verwenden, dann erhalten wir für Slot 21 keine eindeutige Entscheidung. Ob der Prozess P mit der ersten Vorschrift konstruierbar ist, können wir aber anhand der Situation vor Slot 21 nicht entscheiden. Voraussetzung für diese Feststellung ist, dass diese Regel für jedes Zeitelement und die dort vorliegende Situation zu einer eindeutigen Entscheidung führt.

Fall c)
Wir vereinbaren die Zeitfunktionen für jeweils einen Slot von 4 Stunden (und gehen davon aus, dass die jeweilige Zeitfunktion in den restlichen 20 Stunden nicht definiert ist bzw. nicht angezogen wird). Also enthält das folgende Beispiel ausgehend von Fall a) 24 Zeitfunktionen (beginnend mit abcb, 4125) für Slot 1, 2, 3, 4 und endend mit (bbeb, 2334) für Slot 21, 22, 23, 24. Die damit prinzipiell möglichen Reihenfolgen seien im Folgenden dargestellt:

Auf (abcb, 4125) folgen hier in Slot 5, 6, 7, 8 die Sequenzen (aacb, 2334), (adff, 2334) und (aacb, 4152). Auf (adff, 2334) folgt für Slot (9, 10, 11, 12) wieder eine Entscheidung zwischen zwei Alternativen, usw. (siehe Fall a).

Der Prozess P ist konstruierbar, wenn wir eine Relation () finden, die nach den Slots 4, 8, 12, 16 und 20 für die jeweiligen Vergangenheiten eine eindeutige Entscheidung trifft. Diese Festlegung kann den gesamten zeitlichen Horizont als Entscheidungsgrundlage nutzen. Wir beschränken uns hier auf die jeweils nächste Sequenz: Setze mit der Sequenz fort, die in lexikographischer Reihung der Fahrradklassen an der Spitze steht (aaab vor aaae). Wenn damit noch keine Entscheidung möglich ist, wähle die vom Farbcode (1, 2, 3, 4 oder 5) gebildete kleinste 4stellige Zahl (1234 < 4321).

Fall d)
Im folgenden Plan ist es möglich, alleine von (abcb / 4125) auf die Fortsetzung zu schließen, weil wir Tage einführen. Zum einen haben wir dann an jedem Tag in jedem Slot denselben Fahrradtyp und zum anderen nur eine einzige Zeitfunktion (Fahrradtyp, Farbe); die Funktionalität ist explizit festgelegt.

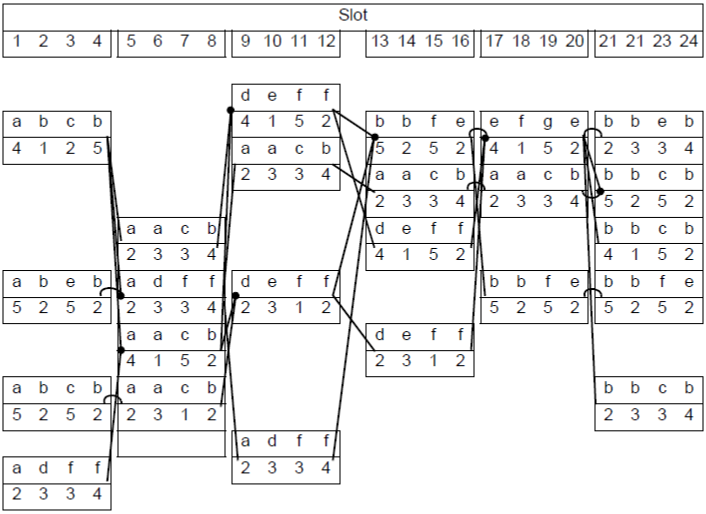
	abcb	adff	aacb	deff	deff	efgc	bbcb
Mo	4125	-	2334	4152	5252	4152	2334
Di	5252	2334	2334	-	-	-	5251
Mi	4125	-	4152	4152	-	4152	4125
Do	5252	-	2312	2312	5252	-	-
Fr	-	2334	4152	2312	-	4152	4125
Sa	4125	-	4152	4152	-	4152	5252
So	4125	2334	-	-	5252	4152	2334

Im Falle einer konstruierbaren Zustandsbeschreibung reicht die Kenntnis von q^t für die Verknüpfung mit q bzw. die Festlegung von q aus; aus der t-Vergangenheit eines Zustandes folgt dessen t-Ausprägung. Also bezeichnet $\langle q^t, q \rangle$ eine Vorschrift, die auf der Basis von q^t stets funktional$q$ bestimmt; für jede Vergangenheit gibt es nur eine Fortsetzung in die Zukunft.

Eine Zustandsbeschreibung $\langle P, Z \rangle$ eines Prozesses P heißt
rekonstruierbar: $\leftrightarrow$ die Relation $\varsigma(t)$, die definiert ist durch $\varsigma(t) \coloneqq \{\langle q_t, q \rangle : q \in Q(t)\}$, ist für beliebige $t \in T$ funktional.
Um einen Zustand $q \in Q(t)$ (und rekursiv dessen t-Vergangenheit) zu bestimmen, genügt die Kenntnis von dessen t-Zukunft q_t. Die Zukunft von q *ist* gegeben und wir wollen q mit den entsprechenden Zeitfunktionen *z(t)* zum Zeitpunkt t konstruieren. Die Bedingung $\varsigma(t) \coloneqq \{\langle q_t, q \rangle : q \in Q(t)\}$ führt auf die Zustandsfunktion q, q ist Element des Zustandsprozesses und der Schluss von q_t auf q ist eindeutig: Wir können das schrittweise - anhand einer jeweils bis t erweiterten Zukunft q_t - in die Vergangenheit verlängern: Für jeden Zustand gibt es nur eine Fortsetzung in die Vergangenheit.

Beispiel 21: Lackierreihenfolge/rekonstruierbar

Wie in Beispiel 20 vereinbaren wir Zeitfunktionen für jeweils 4 Slots.



Eine Wahlmöglichkeit besteht bspw. nach Slot 21 für Slot 20ff nach der Sequenz (bbcb, 5252). Wir wählen als Entscheidungsregel: In absteigender Reihenfolge der Slots in der lexikographischen Reihen am Schluss, ersatzweise in dieser Reihung die größte 4stellige Zahl (efge vor bbfe, 2334 vor 5252).

Wir vereinbaren einen Grad der Konstruierbarkeit bzw. Rekonstruierbarkeit und stellen die Frage, auf was wir zurückgreifen können: Reicht zur Identifikation einer Vergangenheit bzw. eines $z(t)$ bspw. eine einzelne Zeitfunktion oder sind dazu alle Zeitfunktionen eines Zustandes notwendig? Für beliebige $t \in T$ und beliebige $q \in Q(t)$ seien die Mengen $\mathrm{P}_\kappa(q^t), \mathrm{P}_\varsigma(q_t), M_\kappa(q^t), M_\varsigma(q_t)$ definiert durch

$$\mathrm{P}_\kappa(q^t) \coloneqq \{U\colon U \subset q^t \wedge \underset{\overline{q} \in Q(t)}{\forall} U \subset \overline{q}^t \rightarrow \overline{q}^t = q^t\},$$

$$\mathrm{P}_\varsigma(q_t) \coloneqq \{U\colon U \subset q_t \wedge \underset{\overline{q} \in Q(t)}{\forall} U \subset \overline{q}_t \rightarrow \overline{q}_t = q_t\},$$

$\mathrm{P}_\kappa(q^t)$ ist die Potenzmenge der Vergangenheit von q. U ist eine Menge von Zeitfunktionen in der Vergangenheit von q. Wenn U auch Teilmenge einer Vergangenheit $\overline{q}^t$ ist, dann gilt: $\overline{q}^t$ stimmt mit q^t überein - es gibt nur eine Vergangenheit. Daher steckt die Teilmenge U nur in einem q^t. Also bestehen die Mengen $\mathrm{P}_\kappa(q^t)$ und $\mathrm{P}_\varsigma(q_t)$ aus den Teilmengen von q^t bzw. q_t, die q^t bzw. q_t gerade noch eindeutig in $Q(t)^t$ bzw. $Q(t)$ identifizieren:

$$M_\kappa(q^t) := \{U : U \subset \mathrm{P}_\kappa(q^t) \wedge \underset{\overline{U} \in \mathrm{P}_\kappa(q^t)}{\forall} \overline{U} \subset U \to \overline{U} = U\},$$
$$M_\varsigma(q_t) := \{U : U \subset \mathrm{P}_\kappa(q_t) \wedge \underset{\overline{U} \in \mathrm{P}_\varsigma(q_t)}{\forall} \overline{U} \subset U \to \overline{U} = U\}.$$

Die Mengen $M_\kappa(q^t)$ und $M_\varsigma(q_t)$ sind die „minimalen" Mengen von $\mathrm{P}_\kappa(q^t)$ und $\mathrm{P}_\varsigma(q_t)$; sie bilden jeweils das „Blattwerk" des durch die Ordnungsstruktur $(\mathrm{P}(q^t), \subset)$ bzw. $(\mathrm{P}(q_t), \subset)$ gegebenen „Baumes" mit „Wurzel" q^t bzw. q_t.

Daraus leiten wir ab:

- Eine Zustandsbeschreibung $\langle P, Z \rangle$ heißt *schwach konstruierbar*: $\leftrightarrow$ $\langle P, Z \rangle$ ist konstruierbar $\wedge \underset{t \in T}{\forall} \underset{q \in Q(t)}{\forall} M_\kappa(q^t) = \{q^t\}$.
- Eine Zustandsbeschreibung $\langle P, Z \rangle$ heißt *schwach rekonstruierbar*: $\leftrightarrow$ $\langle P, Z \rangle$ ist rekonstruierbar $\wedge \underset{t \in T}{\forall} \underset{q \in Q(t)}{\forall} M_\varsigma(q_t) = \{q_t\}$.

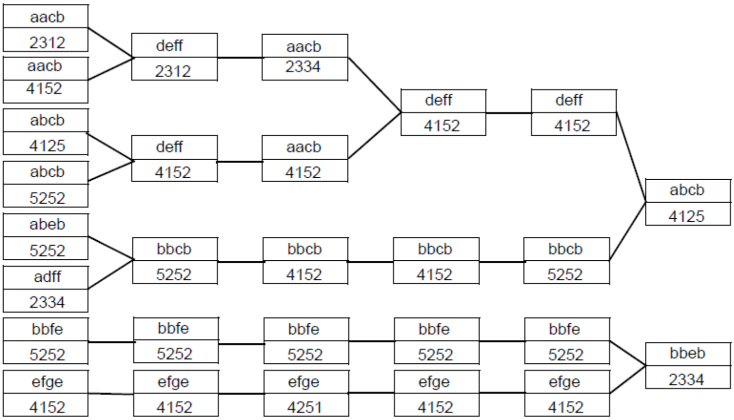
Hier sind die „Blätter" jeweils der ganze Zustand q: Wir definieren drei Zustände mit den Zeitfunktionen 1, 2 bzw. 1, 3 bzw. 2, 3. Dann ist eine einzelne Zeitfunktion in keinem Fall für die Identifikation eines Zustandes ausreichend.

- Eine Zustandsbeschreibung $\langle P, Z \rangle$ heißt *stark konstruierbar*: $\leftrightarrow$ $\langle P, Z \rangle$ ist konstruierbar $\wedge \underset{t \in T}{\forall} \underset{q \in Q(t)}{\forall} M_\kappa(q^t) = \{\{p^t\} : p^t \in q^t\}$..
- Eine Zustandsbeschreibung $\langle P, Z \rangle$ heißt *stark rekonstruierbar*: $\leftrightarrow$ $\langle P, Z \rangle$ ist rekonstruierbar $\wedge \underset{t \in T}{\forall} \underset{q \in Q(t)}{\forall} M_\varsigma(q_t) = \{\{p_t\} : p_t \in q_t\}$.[29]

[29] In den praktischen Anwendungen sind gerade stark konstruierbare und stark rekonstruierbare Zustandsbeschreibungen gefragt, weil sie in der Regel die Bestimmung der Zustände auf einfache Art ermöglichen. Meistens wird dann, wie etwa im Falle der endlichen Automaten, noch die stärkere Forderung erhoben, dass die „Steuerung" bzw. „Beobachtung" über ein „endliches" Zeitintervall zur Festlegung des Zustandes ausreichen soll (siehe (Pichler 1975)).

Beispiel 22: Lackierreihenfolge/starke, schwache (Re-)Konstruierbarkeit

Wir setzen auf Beispiel 20, Fall c auf und verändern das Beispiel so, dass in Richtung Zukunft keine Alternativen auftreten, bspw.



Wir vereinbaren für jeden der 8 möglichen Abläufe von Slot 1 bis Slot 24 eine eigene Zeitfunktion. Jede dieser 8 Zeitfunktionen bildet einen Zustand. Dann liegt starke Konstruierbarkeit vor. Dasselbe gilt auch, wenn wir die Zukunft nur um jeweils 4 Slots fortsetzen: Die Zuordnung von Vergangenheit und Zukunft ist für jede Vergangenheit eindeutig gegeben. Wenn wir jeden der beiden Bäume als Zustand ansehen, dann enthält jeder der beiden Zustände konstant dieselben 6 bzw. 2 Zeitfunktionen.

Jetzt kombinieren wir die Zeitfunktionen 1, 2 bzw. 2, 3 bzw. 1, 3.

		Slot																							
Reihenfolge		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	Fahrradtyp	b	b	c	b	a	a	c	b	d	e	f	f	b	b	f	e	e	f	g	e	b	b	e	b
	Farbe	4	1	2	5	2	3	3	4	4	1	5	2	5	2	5	2	4	1	5	2	2	3	3	4
2	Fahrradtyp	a	b	e	b	a	d	f	f	a	a	c	b	a	a	c	b	a	a	c	b	b	b	c	b
	Farbe	5	2	5	2	2	3	3	4	2	3	3	4	2	3	3	4	2	3	3	4	5	2	5	2
2	Fahrradtyp	a	b	e	b	a	d	f	f	a	a	c	b	a	a	c	b	a	a	c	b	b	b	c	b
	Farbe	5	2	5	2	2	3	3	4	2	3	3	4	2	3	3	4	2	3	3	4	5	2	5	2
3	Fahrradtyp	a	b	c	b	a	a	c	b	d	e	f	f	d	e	f	f	e	f	g	e	b	b	c	b
	Farbe	4	1	2	5	4	1	5	2	4	1	5	2	4	1	5	2	4	1	5	2	4	1	5	2
1	Fahrradtyp	b	b	c	b	a	a	c	b	d	e	f	f	b	b	f	e	e	f	g	e	b	b	e	b
	Farbe	4	1	2	5	2	3	3	4	4	1	5	2	5	2	5	2	4	1	5	2	2	3	3	4
3	Fahrradtyp	a	b	c	b	a	a	c	b	d	e	f	f	d	e	f	f	e	f	g	e	b	b	c	b
	Farbe	4	1	2	5	4	1	5	2	4	1	5	2	4	1	5	2	4	1	5	2	4	1	5	2
		Schicht 1								Schicht 2								Schicht 3							

In diesem Fall liegt schwache Konstruierbarkeit und schwache Rekonstruierbarkeit vor.

Für die Zustandsbeschreibungen $\langle P, Z_0\rangle$, $\langle P, Z_1\rangle$, $\langle P, \tilde{Z}\rangle$ und $\langle P, \bar{\bar{\bar{Z}}}\rangle$ gelten hinsichtlich Konstruier- und Rekonstruierbarkeit die folgenden Aussagen:

+ Die feinste Zustandsbeschreibung $\langle P, Z_0\rangle$ ist im allgemeinen nicht konstruierbar und nicht rekonstruierbar.

Der Beweis folgt unmittelbar daraus, dass im allgemeinen nicht von p^t bzw. p_t auf p geschlossen werden kann. Das wird wieder verständlich, wenn wir davon ausgehen, dass mehrere Zeitfunktionen $p \in P$ dieselbe Vergangenheit haben: Wie wollen wir jetzt auf eine Zukunft, die p heißt, schließen? Dasselbe rückwärts: Wenn mehrere p dieselbe Zukunft haben, wie wählt man dann die richtige Vergangenheit aus?

+ Die gröbste Zustandsbeschreibung $\langle P, Z_1\rangle$ ist stark konstruierbar und stark rekonstruierbar.

Der Beweis ist trivial, denn für alle Zeiten t gibt es stets nur den einen Zustand $q = P$.

+ Die natürliche Zustandsbeschreibung $\langle P, \tilde{Z}\rangle$ ist stark konstruierbar, aber im allgemeinen nicht rekonstruierbar.

Den Beweis führen wir wie folgt: Gilt $\langle q^t, q\rangle \in \kappa(t)$ und $\langle q^t, \bar{q}\rangle \in \kappa(t)$, so gilt $q^t = \bar{q}^t$, und es existiert eine Zeitfunktion $p \in P$ mit $q^t = \{p^t\} = \bar{q}^t$. Es ist dann $q = p \underset{t}{<} P = \bar{q}$. Demnach ist $\kappa(t)$ funktional und daher $\langle P, \tilde{Z}\rangle$ konstruierbar. Dass $\langle P, \tilde{Z}\rangle$ stark konstruierbar ist, schließen wir daraus, dass jede Menge $M_\kappa(q^t)$ durch $M_\kappa(q^t) = \mathrm{P}_\kappa(q^t) = \{p^t\}$ mit $p \in q$ gegeben ist. In der Regel ist aber $\langle P, \tilde{Z}\rangle$ nicht rekonstruierbar, weil wir im allgemeinen nicht von $q_t = (p \underset{t}{<} P)_t, p \in q$, auf p^t schließen können.

+ Die reduzierte Zustandsbeschreibung ist stark konstruierbar und rekonstruierbar, aber im Allgemeinen nicht stark rekonstruierbar.

Zum Beweis definieren wir zunächst die Relationen $\alpha_0(t)$ und $\alpha(t)$ durch $\alpha_0(t) \coloneqq \{\langle p^t, p \underset{t}{\circ} q\rangle : q \in Q(t) \wedge p \in q\} \alpha(t) := \{\langle p^t, q\rangle : q \in Qt \wedge p \in q\}$

und zeigen, dass diese Relationen funktional sind. Wenn $\langle p^t, p \underset{t}{\circ} q\rangle \in \alpha_0(t)$ und $\langle p^t, p \underset{t}{\circ} \bar{q}\rangle \in \alpha_0(t)$ mit $p \in q \cap \bar{q}$ gilt, dann gilt nach der Definition von $\langle P, \bar{\bar{\bar{Z}}}\rangle$ auch $q = \{\bar{p} : \bar{p} \in P \wedge \bar{p}_t \in (p \underset{t}{<} P)_t\} = \bar{q}$ und damit auch $p \underset{t}{\circ} q = p \underset{t}{\circ} \bar{q}$. $\alpha_0(t)$ ist also funktional. Weil $\langle P, \bar{\bar{\bar{Z}}}\rangle$ konkatenationstreu ist, gilt auch $p \underset{t}{\circ} q = p \underset{t}{<} q$ und daher mit der oben definierten Relation $v(t)$ auch $\alpha(t) = \alpha_0(t) \circ v(t)$. $\langle P, \bar{\bar{\bar{Z}}}\rangle$ ist vergangenheitserweiternd, die Relation $v(t)$ daher funktional. Deshalb ist auch $\alpha(t)$ funktional.

Jede t-Vergangenheit p^t einer Zeitfunktion p bestimmt daher eindeutig den zugehörigen Zustand q, in dem p liegt. Damit ist $\langle P, \overline{\overline{\overline{Z}}} \rangle$ stark konstruierbar.

Es sei nun $\langle q_t, q \rangle \in \varsigma(t)$ und $\langle q_t, \overline{q} \rangle \in \varsigma(t)$. Dann ist $q_t = \overline{q}_t$ und $q = \{\overline{p}: \overline{p} \in P \wedge \overline{p}_t \in \overline{q}_t\} = \{\overline{p}: \overline{p} \in P \wedge \overline{p}_t \in \overline{q}_t\} = \overline{q}; \varsigma(t)$ ist in diesem Fall funktional und $\langle P, \overline{\overline{\overline{Z}}} \rangle$ rekonstruierbar. In der Regel ist die Voraussetzung für die Rekonstruktion eines Zustandes $q \in Q(t)$ aber die Kenntnis von ganz q_t, so dass $\langle P, \overline{\overline{\overline{Z}}} \rangle$ im allgemeinen nicht stark rekonstruierbar ist.

Wir heben unsere Anforderungen an eine Zustandsbeschreibung um einen weiteren Schritt auf eine höhere Ebene: Eine Zustandsbeschreibung $\langle P, Z \rangle$ eines Prozesses P heißt *minimal*, wenn gilt $\langle P, Z \rangle$ ist dynamisch $\wedge \langle P, Z \rangle$ ist stark konstruierbar $\wedge \langle P, Z \rangle$ ist stark rekonstruierbar.

„Minimale Zustandsbeschreibung" heißt: Ein Prozess besteht in einer einzigen, in Richtung Vergangenheit und Richtung Zukunft funktionalen Zeitfunktion. Dann folgt: Keine der Zustandsbeschreibungen $\langle P, Z_0 \rangle$, $\langle P, Z_1 \rangle$, $\langle P, \widetilde{Z} \rangle$ und $\langle P, \overline{\overline{\overline{Z}}} \rangle$ ist eine minimale Zustandsbeschreibung.

Ein Prozess P heißt *homogen*, wenn dafür gilt $\underset{p \in P}{\forall} \underset{t \in T}{\forall} ((P \underset{t}{>} p) \circ (p \underset{t}{<} P) \subset P)$. In homogenen Prozessen ist jeweils die Konkatenation einer „Linkserscheinung" und einer „Rechtserscheinung" bezüglich einer Prozesszeitfunktion ein Teilprozess des betrachteten Prozesses P. Es gilt das Gesetz: Die reduzierte Zustandsbeschreibung $\langle P, \overline{\overline{\overline{Z}}} \rangle$ eines homogenen Prozesses P ist minimal. Den Beweis führen wir wie folgt: In diesem Fall ist $\langle P, \overline{\overline{\overline{Z}}} \rangle$ stark rekonstruierbar: Jeder Zustand $q \in \overline{\overline{\overline{Q}}}(t)$ hat die Form $q = (P \underset{t}{>} p) \underset{t}{\circ} (p \underset{t}{<} P)$ mit $p \in q$. Wenn wir $p_t \in q_t$ kennen, dann ist damit $P \underset{t}{>} p = \{\overline{p}: \overline{p} \in P \wedge \overline{p}^t = p^t$ eindeutig gegeben; mit $p \in P \underset{t}{>} p$ kennen wir $p \underset{t}{<} P = \{\overline{p}: \overline{p} \in P \wedge \overline{p}^t = p^t$ und damit auch $q_t = (p \underset{t}{<} P)_t$.

3 Kardinale Zeitmengen

Die Zeitmengen unterschiedlicher Organisationseinheiten (Werke, Arbeitsbereiche) eines Unternehmens werden aufgrund der zugrundeliegenden Ereignismengen a priori nicht identisch sein. Wenn wir diese Zeitmengen ineinander überführen wollen, dann können wir als eine Möglichkeit alle diese Zeitmengen auf jeweils alle anderen Zeitmengen oder als zweite Möglichkeit alle Zeitmengen auf eine dann als ausgezeichnetes Zeitmodell gekennzeichnete Zeitmenge abbilden. Ggf. ist es bei der zweiten Möglichkeit dann sinnvoll, eine kardinale Zeitmenge einzuführen, mit der wir Zeitabstände miteinander vergleichen und „rechnen“ können (Carnap 1974). Für diese eigene Uhr brauchen wir einen Taktgeber, mit dem wir die Zeiteinheit festlegen können (bspw. Takt der Montagelinie). Wenn wir darüber hinaus die Gelegenheit nutzen und eine Anbindung an die Umwelt schaffen wollen, dann brauchen wir allgemein beobachtbare Ereignisse (bspw. Sonnen- oder Mondaufgang, Schwingen eines Caesium-Atoms).

Auch hier haben nicht alle Konzeptionen dieselben Eigenschaften und nicht überall gelten dieselben Regeln. In jedem Fall gelten die für ordinale Zeitmengen abgeleiteten Regeln. Eine solche „Uhr“ können wir wieder einschränken und begrenzen. Schließlich können wir in begrenzten Zeitmengen Aussagen über Zeitelemente treffen und diese Zeitelemente bewerten.

Wir beginnen unsere Diskussion der *kardinalen Zeitmengen* mit dem einfachsten algebraischen Konzept und einer einseitig begrenzten Zeitmenge.

\+ Grundmodell einer additiven Zeitmenge

Wir betrachten eine bis □ fortlaufende Zeitmenge mit algebraischer Struktur und einem Nullpunkt. Negative Werte, also $t < t_0$, werden ausgeschlossen. Zeitliche Abstände drücken wir aus, indem wir den Abstand eines Zeitelements t zum minimalen Element t_0 verwenden. Eine *additive Zeitmenge* $(T, +, <, t_0)$ definieren wir durch:[30]

(1) $(T, +)$ ist ein Monoid mit Nullelement t_0.

(2) $\forall_{t,t' \in T} \; \exists_{t'' \in T} \; t + t'' = t' \vee t' + t'' = t.$

(3) $\forall_{t,t',t'' \in T} \; t' + t = t + t'' \leftrightarrow t' = t''.$

(4) $\forall_{t,t' \in T} \; t' + t = t_0 \rightarrow t' = t_0.$

(5) < ist eine Relation auf *T*, die gegeben ist durch
$t < t' :\leftrightarrow \exists_{t'' \in T} \; t'' \neq t_0 \wedge t + t'' = t'$

[30] Das ist die Uhr, die die Dauer der Zugehörigkeit des HSV zur Bundesliga in Sekunden zählt. Und auf dieser Uhr tragen wir die Zeitpunkte der Amtsantritte und die Amtsdauern der einzelnen Präsidenten ein. Oder es ist eben die Uhr, die mit dem Start eines Marathonlaufes in Bewegung gesetzt wird.

Also folgt immer: Zeit t + Zeit t' = Zeit t''. Als Operationszeichen ist daher auch nur „+" vereinbart. Ein negatives Zeitelement wird nicht verwendet bzw. nicht vereinbart. Daher ist auch keine Addition von Zeiten/Zeitstrecken/Zeitintervallen möglich, die in die Vergangenheit zeigen. Eine additive Zeitmenge $(T, +, <, t_0)$ bezeichnen wir mit dem Symbol „+ *time*".

In einer additiven Zeitmenge $(T, +, <, t_0)$ gelten für beliebige $t, t', t'' \in T$ die Beziehungen

I	$t' + t = t + t'$	kommutativ,
II	$t + t' = t + t'' \rightarrow t' = t''$	linke Kürzung,
III	$t < t' \vee t = t' \vee t' < t$	vollständig,
IV	$\neg(t < t)$	nicht reflexiv,
V	$t < t' \rightarrow \neg(t' < t)$	nicht symmetrisch,
VI	$t < t' \wedge t' < t'' \rightarrow t < t''$	transitiv,
VII	$t < t' \leftrightarrow t'' + t < t'' + t'$	linksinvariant,
VIII	$t < t' \rightarrow t < (t' + t'')$	rechtserweiternd,
IX	$t \neq t_0 \leftrightarrow t_0 < t$	t_0 ist minimal,
X	$t \neq t_0 \leftrightarrow t < (t + t')$	echt zunehmend.

Hier gibt es eine Einschränkung: Eine additive Zeitmenge $(T, +, <, t_0)$ besitzt nicht die Struktur einer Zeitmenge $(T, \leq, t_0)$ mit der oben eingeführten Definition; die Relation $<$ ist zwar transitiv und antisymmetrisch, aber nicht reflexiv, und daher keine Ordnungsrelation[31].

Es gilt das folgende Gesetz: Es sei $(T, +, <, t_0)$ eine additive Zeitmenge. Dann stellt $(T, \leq, t_0)$ - also die um die Diagonalen-Elemente erweiterte Relation $<$ - eine Zeitmenge im Sinne unserer oben gegebenen Definition dar. Zum Beweis haben wir uns zu überzeugen, dass $\leq$, wie es hier aus = und < konstruiert wurde, eine vollständige Ordnungsrelation auf der Menge *T* ist. Da = ⊂ ≤ gilt, ist ≤ offenbar reflexiv. Gilt $t \leq t' \wedge t' \leq t$, so ist dies gleichbedeutend damit, dass $(t < t' \vee t = t') \wedge (t' < t \vee t = t')$ gilt, oder weiter ausgerechnet $(t < t' \wedge t' < t) \vee (t < t' \wedge t = t') \vee (t = t' \wedge t' < t) \vee (t = t')$. Wegen der Beziehungen (IV) und (V) des vorhergehenden Gesetzes (< ist nicht reflexiv und nicht symmetrisch) kann aber nur $t = t'$ gelten. Dass ≤ transitiv ist, folgt unmittelbar daraus, dass < nach (VI) des vorhergehenden Gesetzes transitiv ist und dass auch = transitiv ist, des Weiteren sehen wir, dass ≤ vollständig ist, da bereits < nach (III) vollständig ist. Die Relation ≤ ist also eine vollständige Ordnungsrelation auf der Menge *T*. Dass t_0 bezüglich ≤ minimal ist, folgt unmittelbar aus (IX) des vorhergehenden Gesetzes. $(T, \leq, t_0)$ ist also eine

[31] siehe (Bronstein/Semendjajew 1979)

Zeitmenge. Wir nennen $(T, \leq, t_0)$ die von der additiven Zeitmenge $(T, +, <, t_0)$ *induzierte Zeitmenge*.[32]

In der Produktion sind zwei spezielle additive Zeitmengen von besonderem Interesse:

(1) $(\mathbb{N}_0, +, <, 0)$, wobei $\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null 0, + die übliche Addition und < die übliche „kleiner“ Relation natürlicher Zahlen bedeuten, ist eine additive Zeitmenge. Sie ist der Prototyp einer diskreten Zeitmenge.

(2) $(\mathbb{R}_+, +, <, 0)$, wobei $\mathbb{R}_+$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen, + die übliche Addition und < die übliche „kleiner“ Relation auf $\mathbb{R}_+$ bezeichnen, ist eine additive Zeitmenge. Sie ist der Prototyp einer kontinuierlichen Zeitmenge.[33]

\+ Additive Zeitmenge mit Modulo-Zeit

Wir geben die Vorstellung von der ständig fortlaufenden unendlichen bzw. begrenzten Zeit auf. Dagegen sollen *Modulo Strukturen* möglich sein: Eine *Zeitmenge mit Modulo-Addition* ist definiert durch

(1) $(T, +)$ ist ein Monoid mit Nullelement t_0.

(2) $\underset{t,t' \in T}{\forall} \; \underset{t'' \in T}{\exists} \; t + t'' = t' \vee t' + t'' = t$.

(3) $\underset{t,t',t'' \in T}{\forall} \; t' + t = t + t'' \leftrightarrow t' = t''$.

(4) .Abgeschlossenheit in T: $\underset{t,t' \in T}{\forall} \; t + t' = t'', t'' \in T$ und Moduloaddition.

(5) < ist eine Relation auf T, die gegeben ist durch $t < t' :\leftrightarrow \underset{t'' \in T}{\exists} \; t'' \neq t_0 \wedge t + t'' = t'$.

Beispiel 23: Z_{24} als tägliche Zeitmenge in Stunden

Wir betrachten eine Uhr mit einem 24 Stunden Ziffernblatt und der Zeitmenge $T \coloneqq (Z_{24} \coloneqq \{0,1,2,\ldots,23\}, +, <, t_0)$

(1) assoziative Addition, Addition Nullelement ✓.

(2) Zwei Werte t, t' sind entweder gleich oder einer von den beiden ist der größere.

(3) Gleichgültig ist, ob t der erste oder der zweite Summand, das Ergebnis ist dasselbe.

---

[32] Die entsprechende Argumentation gilt genauso für die Längen- oder Temperaturmessung

[33] Eine kontinuierliche Zeitmenge erlaubt ein beliebig genaues Einordnen eines Ereignisses. Damit ist aber auch die Vorgabe an ein Produktionssystem beliebig genau. Es gibt keinen „Dispositionsspielraum“ für eine unterlagerte Planungsebene oder für den Werker - die Vorgabe ist völlig exakt und damit die Abweichung zwischen Plan und Ist zwangsläufig. Dementsprechend muss auch jede Transformation einzeln rückgemeldet werden - eine Sammelmeldung am Ende des Zeitabschnitts ist nicht ausreichend. Bei einem Zeitraster - also einer diskreten Zeitmenge - stellt das Zeitelement dagegen den minimalen Spielraum für den Werker oder eine unterlagerte Planungsebene dar.

(4) Die Definition des Grundmodells sieht vor: Jede weitere Addition entfernt uns weiter von t_0. Hier können wir uns von t_0 wegbewegen und dann von „hinten“ nach t_0 (also von links! nach t_0) kommen. Also gibt es mit Z_{24} ein „Zurück“.

(5) Auch in einer Modulo-Struktur gilt die < Relation: Wenn t''nicht t_0 ist, dann verändert t'' einen Wert t bei einer Addition nach t'. Aber: Als Voraussetzung ist in (5) vorgeschrieben: $t < t'$! Also bewegen wir uns innerhalb Z_{24}; Wir haben immer ein Element, mit dem wir ein beliebiges t bis t', maximal $t' = 23$, ergänzen können. Also gilt: Ein Tag hat 24 Stunden, alles was darüber hinausgeht, betrifft den nächsten Tag.
Das kann über das neutrale Element t_0 durch eine Rechtsaddition erreicht werden, z. B. 17.00 + 8.00 = 1.00, und ein Tag ist mit [0, 24) vereinbart. Das ist höchst einfach: Die Uhr schwappt in der Nacht auf Null. Dann ist das einfach „Dienstag, 09.00“ oder „Mittwoch, 16.00“. Das ist aber nicht: „Ein Bohrer wird neu geschliffen und hat jetzt wieder die volle Standzeit“ oder „Ein Inder wird neu geboren und beginnt jetzt sein nächstes Leben“. Das wäre ein neues t_0 und die Obergrenze wieder ∞ oder 100 Jahre. Der Zyklus, den wir bei einem Bohrer oder einem Inder betrachten, hat mit dem alten nichts zu tun - man ist am Ende eines solchen Zyklus „tot“ und nimmt nichts mit in das nächste Leben.[34]

Beispiel 24: Diskrete Uhr Z_{12}, +
Wir betrachten bspw. die Uhr an der Wand mit den Ziffern von 1 bis 12. Diese Uhr sagt nichts darüber aus, ob Vormittag oder Nachmittag ist und sie sagt auch nichts über den Tag aus. Das wissen wir aus anderen Quellen. Wenn wir jetzt als *x* diese Uhr und als *y* die über einer Woche fortschreitende Zeit betrachten, dann ist am Montagvormittag der Zeiger auf 11, am Montagnachmittag auf 11, am Dienstagvormittag auf 11 Uhr. Und auch für die Zeigerstellung „0“ haben wir zwei *y*-Werte am Montag. Dasselbe gilt für ein Handrad an einer Drehmaschine: Die Stellung ist wieder auf „Null“, der Drehstahl aber einer Umdrehung entsprechend „woanders“.

[34] Das ist möglicherweise nicht ganz korrekt - auch die Leben des Inders stehen zueinander in Bezug. Aber die wichtige Aussage ist: Hier ist der Dienstag die ganz normale Zukunft vom Montag, auch wenn am Dienstag wieder von vorn gezählt wird.

Zwei solche Uhren können wir addieren und miteinander vergleichen.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

\+ Zeitabschnittsmenge

In einer Zeitmenge +*time* sprechen wir von Zeitelementen, nicht ausschließlich von Zeitpunkten. +*time* betrachtet den Abstand eines bestimmten Zeitelements vom minimalen bzw. zwischen zwei gegebenen Zeitelementen t und t', macht aber keine Aussagen zur zeitlichen Ausdehnung eines Zeitelements. In einer Zeitmenge, die die reellen Zahlen zugrundelegt, ist diese Ausdehnung definitionsbedingt Null. Im Folgenden gehen wir davon aus, dass auch in einer diskreten Zeitmenge +*time* mit $T \subset \mathbb{N}_0$ ein Zeitelement $t \in T$ ohne zeitliche Ausdehnung ist. Damit setzen wir isolierte Zeitpunkte voraus.[35] Jeweils zwei benachbarte Zeitpunkte definieren in einer solchen diskreten Zeitmenge +*time* einen Zeitabschnitt t, t':

Ein *Zeitabschnitt* t, t' bezeichnet den Zeitraum zwischen zwei benachbarten Zeitpunkten t und t' eines diskreten Zeitmodells. Für $t, t' \in T$ gilt:

$$t' \in T_t \wedge \underset{\substack{t'' \in T \\ t'' \neq t'}}{\forall} (t' < t'') \vee (t'' = t).$$

Den Zeitabschnitt t, t'mit $t' = t_1$ und $t = t_0$ bezeichnen wir mit za_1, jeder beliebige Zeitabschnitt erhält seine Bezeichnung über seinen Endzeitpunkt: $za \coloneqq t'$. Eine Zeitabschnittsmenge, die wir mit Δ*time* bezeichnen, ist damit über die zugehörige additive Zeitmenge definiert[36]: $(\{za\}, +, <, za_1) := (T, +, <, t_0)$.

35 Isolierte Punkte einer Menge werden in (Bronstein/Semendjajew 1979), S. 243 definiert.

36 Siehe bspw. den Modellierungsansatz von Allen in (Allen 1984). Er leitet seine temporale Logik auf der Basis eines intervallorientierten Zeitverständnisses her.

Beispiel 25: Datenerfassungsterminal
Ein Datenerfassungsterminal ordnet ein Ereignis (Beginn/Ende) t_1, t_2 oder (t_1, t_2) zu. $t_1 \rightarrow$ 07.00 Uhr, $t_2 \rightarrow$ 08.00 Uhr. Es gibt keine Aussage im Terminal „07.32“; vielmehr ist das Terminal so eingestellt: „Zuordnung von Produktionsereignis zu 08.00 Uhr“. 08.01 Uhr springt die Zuordnungsvorschrift und ordnet 9.00 Uhr zu.

+ Einschränkung der Zeitmenge
Generell ist das Konzept der Einschränkung von Zeitmengen das gegebene Mittel zur Beschreibung des Übergangs von einer Zeitbeschreibung zu einer zugehörigen „gröberen“ Zeitbeschreibung mit einer anderen Zeiteinheit:
Es bezeichne $(T, +, <, t_0)$ eine additive Zeitmenge. Für eine Zeitmenge UU betrachten wir dann die von $(T, <)$ induzierte Ordnungsstruktur $(T', <')$, die gegeben ist durch $T' := T \cap U$ und $<' \subset T' \times T'': t' <' t'' \leftrightarrow t' < t$. Existiert in $(T', <')$ ein minimales Element $t'_0 \in T'$, dann stellt $(T', +, <, t'_0)$ eine Zeitmenge mit dem minimalen Element t'_0 dar. Wir bezeichnen sie als die *Einschränkung der Zeitmenge* $(T, +, <, t_0)$ *auf die Menge* U.

+ Begrenzte Zeitmenge und variable Zeiteinheiten
Für eine gegebene additive Zeitmenge $(T, +, <, t_0)$ und für die Mengen T^t mit $t > t_0$, T_t mit $t \in T$ und $T_{t,t'}$ mit $t < t'$, die definiert sind durch $T^t := \{t'': t'' \in T \wedge t'' < t\}, T_t := \{t'': t'' \in T \wedge t \leq t''\}$ und $T_{t,t'} := \{t'': t'' \in T \wedge t \leq t'' < t'\}$, seien die zugehörigen *Einschränkungen time/*T^t, *time/*T_t und *time/*$T_{t,t'}$ mit *time/*$T^t = (T^t, +, <, t_0)$, die Vergangenheit von t, *time/*$T_t = (T_t, +, <, t)$, die Zukunft von t, und *time/*$T_{t,t'} = (T_{t,t'}, +, <, t)$, das Zeitintervall mit Startzeit t und Stoppzeit t'.

Eine *begrenzte Zeitmenge* $(T, +, <, t^*, t_0)$ ist definiert durch:
(1) $(T, +)$ ist ein Monoid mit Nullelement t_0.
(2) $\forall_{t,t' \in T} \exists_{t'' \in T}\; t + t'' = t' \vee t' + t'' = t.$
Falls $t + t'' \vee t' + t'' \notin T$:[37]
Fall 2a: Kürzen des Summanden[38]
$t'' := (t + t'' = t^* \vee t' + t'' = t^*)$
Fall 2b: keine Summation[39]
$t'' := (t + t'' = t \vee t' + t'' = t')$
(3) $\forall_{t,t' \in T}\; t' + t = t + t'' \leftrightarrow t' = t''.$
(4) $\forall_{t,t' \in T}\; t' + t = t_0 \rightarrow t' = t_0.$
(5) $<$ ist eine Relation auf T, die gegeben ist durch $t < t' :\leftrightarrow \exists_{t'' \in T}\; t'' \neq t_0 \wedge t + t'' = t'$.

---

37 Wir protokollieren: „außerhalb des Definitionsbereichs“.
38 Wir kürzen die Summe: Am Ende der Schicht ist eine Kiste ggf. teilbar.
39 Wir verkürzen den zweiten Summanden: Am Ende der Schicht nur ganze Kiste.

Wir gehen im Weiteren von einer *begrenzten*, nicht zyklischen *Zeitmenge* eines Faktors aus: $T \coloneqq \{t\}$ mit $t_0 \leq t \leq t^*$. Mit zunehmender Zeit soll jetzt aber der Abstand t'' zwischen zwei Zeitpunkten t, t' abhängig von der Differenz $(t^* - t)$ immer kleiner und bei $t = t^*$ schließlich „Null“ werden. Dann ist wieder Ziffer (2) zu ändern. Wir wählen bspw.

$$\forall_{t,t',t'' \in T} \quad t'' = 1/2\,((1 - t/t^*) + (1 - t'/t^*)) \cdot (t - t') \text{ mit } (t \geq t'),$$

$$t_0'' = (1 - 0/t^*) \cdot (t - t'), t^{*''} = (1 - t^*/t^*) \cdot (t - t').$$

Sei T ein abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlen $[t_0, t^*]$. Wenn t^* eine endliche Zahl ist, dann startet t_0'', also der Abstand zwischen zwei Zeitpunkten, bei t_0 mit $1 \cdot (t - t')$ und endet bei t^* mit $0 \cdot (t - t')$. Solange $t_0'' = 1 \cdot (t - t')$ ist, ist ein Faktor im Status der Geburt, komplett neu. Wenn nichts passiert, also die Zeit nicht fortschreitet, bleibt dieser Zustand erhalten. Am Ende der Zeitmenge ist $t_0'' = 0 \cdot (t - t')$, der Faktor ist „tot“. Kurz vorher wird der Abstand in der Zeit immer kleiner, die Zeit läuft immer schneller ab: Die Zeit zerrinnt, der Faktor gerät immer mehr in „Stress“. Am Ende fallen alle Ereignisse zusammen. Zwei Grenzfälle sind interessant: $t^* = 0$ und $t^* = \infty$. Für $t^* = \infty$ gilt: $(1 - t/\infty) = 1 =$ const., damit ist der Abstand zwischen zwei Zeitpunkten *t*, *t‘* nur vom Intervall, aber nicht von der Lage des Intervalls abhängig.
Ein solcher Faktor ist „unsterblich“, „fühlt sich immer neu geboren“ und „tickt“ mit absolut konstanten Zeitabständen vor sich hin: Genau das gilt für ein Pendel, das als Zeitmesser eingesetzt wird. Da es nicht „stirbt“, hat es immer Zeit und nie „Stress“, seine Zeitmenge ist unveränderlich „∞“. Für das Pendel ändert sich nie etwas, es tickt absolut gleichförmig. $t^* = 0 \cdot (t - t')$ ist dagegen der Zustand am Ende einer Zeitmenge: Es gibt keinen weiteren Zeitpunkt, keine weiteren Ereignisse mehr. Die Zeitmenge ist aufgebraucht. Und da $0 : 0$ nicht definiert ist, ist auch keine Zeit mehr definiert. Das ist das Ende der Welt (siehe bspw. [KURZ99])[40] für diesen Faktor: „Man möchte noch so viel, es bleibt aber keine Zeit mehr“.

Beispiel 26: „Beliebig viel Zeit“
Wir betrachten die Situation zu Beginn und zum 1000. Zeitelement der Zeitmenge mit $t^* = \infty$:
$t' = t_0, t = t_1 : t'' = 1/2\,((1 - t_1/\infty) + (1 - t_0/\infty)) \cdot (t_1 - t_0) = 2/2 = 1$
$t' = t_{999}, t = t_{1000} : t'' = ((1 - 1000/\infty) + (1 - 999/\infty))/2 \cdot (1000 - 999) = 2/2 = 1$

[40] *„Und wenn das Universum sich endlos ausdehnt? Dann würden die Sterne und Galaxien ihre Energie schließlich ganz aufzehren. Übrig bliebe ein sich weiter auseinanderdehnender stellarer Friedhof. Ein gewaltiges Chaos entstünde - viel Zufälligkeit ohne sinnvolle Ordnung. Nach dem Gesetz von Zeit und Chaos würde die Zeit auf diese Weise schrittweise zum Stillstand kommen. Und freilich gäbe es in einem solchen toten Universum auch keine Wesen mehr, die seine Existenz bewusst wahrnehmen könnten. Nach der Quantenmechanik und nach den fernöstlichen subjektivistischen Sichtweisen hieße es, das Universum würde aufhören zu existieren.“* R. Kurzweil: Homo sapiens (Kurzweil 1999)

Beispiel 27: „Stress“
Die Fa. XYZ hat 20 Tage Lieferzeit mit ihrem Großkunden vereinbart. Die „Gemütslage“ des Vertriebsmitarbeiters (bzw. sein Zigarettenkonsum) wird durch die folgende Zeitfunktion beschrieben:
$t^* = 20$
$t' = t_0, t = t_1: t'' = 1/2\,((1 - t_1/t_{20}) + (1 - t_0/t_{20})) \cdot (t_1 - t_0) = 1{,}95/2$
(„Absolute, souveräne Ruhe“)
$t' = t_{19}, t = t_{20}: t'' = 1/2\ ((1 - 20/20) + (1 - 19/20)) \cdot (t_{20} - t_{19}) = 0{,}05/2$
(„Herzinfarkt“) [41].

Wenn wir das mit etwas Abstand interpretieren: 1,95/2 bzw. 0,05/2 ist die Zeit, die „gefühlt“ für ein Ereignis verbleibt.[42] „Gefühlte Zeit“ ist wie folgt zu verstehen: Es existiert eine Zeitmenge, die auf einem Pendel mit unendlicher Zeit beruht, immer gleichförmig, immer stressfrei, keine Anstrengung und keine Schwäche oder Krankheit. In dieser Zeitmenge messen wir den Abstand von zwei Zeitpunkten, also bspw. 10 Jahre. Darüber hinaus existiert neben dieser objektiven Zeitmenge eine subjektive Zeitmenge, eine Zeitfunktion, auf die wir dieses Zeitintervall als Individuum beziehen.[43]

Beispiel 28: „Langeweile“
Die Lebenszeit betrage 80 Jahre. Die Normierung der Jahre von 50 bis 60 beträgt mit
$t'' = 1/2\ ((1 - t/t^*) + (1 - t'/t^*)) \cdot (t - t')$
$t'' = \big((1 - 60/80) + (1 - 50/80)\big)2 \cdot (10) = (0{,}25 + 0{,}375)/2 \cdot (10) =$
$0{,}625/2 \cdot (10) = 3{,}125.$

Wir legen bspw. fest: Wenn einem Menschen eine Zeitspanne doppelt so lange und länger als die normierte Zeit erscheint, hat er Langeweile. Dann gilt: Kommt die Zeitspanne von 50 bis 60 einem Menschen wie ≥ 6,25 Jahre vor, hat er Langeweile (Das ist ungefähr die Situation von 20 - 30: 1,375 : 0,2).

---

41 Alternativ: Die Taktzeit bleibt unverändert, aber die Einheit des Durchflusses wird verändert. Der Durchfluss berechnet sich dann über ein Integral. Die Einheit des Durchflusses bleibt unverändert (bspw. 1 Auto), aber die Taktzeit nimmt ab. Daher ist es auch nicht gleichgültig, ob wir die Betrachtung am 10. oder am 100. Takt aufsetzen.

42 Angenommen, der Chef ist nicht da. Dann kann man am Anfang der 20 Tage noch 2 Tage warten, am Ende der 20 Tage ruft man ggf. den Chef an der Copacabana an, um eine Entscheidung in 0,05/2-Komma-Nichts zu erhalten. Wir können uns aber sehr wohl vorstellen, dass wir immer mehr Personal parallel einsetzen, um die Produktion zu beschleunigen.

43 Das ist genau die in (Carnap74) diskutierte Situation, wenn jeder die Zeit mit seinem eigenen Pulsschlag misst: Für unterschiedliche Menschen läuft die Zeit unterschiedlich schnell - ein Tag dauert für den einen länger, für den anderen weniger lang. Mit zunehmendem Alter wird der Pulsschlag immer langsamer ... „1 Jahr“ sind dann aber trotzdem 365 Sonnenaufgänge!

Wir verändern die Vorstellung von der additiven Zeit so, dass die Zeitabstände trotz prinzipiell unbegrenzter Zeit mit fortlaufender Zeit immer kleiner werden.[44] Dazu verändern wir Bedingung (2); im folgenden Beispiel sei unsere Zeitmenge definiert durch

$$\forall_{t,t',t'' \in T} \quad t'' = 2 \cdot (t - t')/t + t' \cdot (t - t') \text{ mit } t \geq t'$$

t'' ist vom Intervall und vom Mittelwert von t und t' abhängig.

Beispiel 29: „Älterwerden"
3 · 30 Jahre sind 90 Jahre, aber von 30 bis 60 dauert es länger als von 60 bis 90: 2(60 – 30)/(60 + 30) > 2 (90 – 60)/(60 + 90)
60/90 > 60/150

Intervall

t	*t'*	Zeit-intervall	Bewertung	Anzahl Zeit-elemente
0	1	$t''_{0,1}$	2/1	· 1
1	2		2/3	· 1
2	3		2/5	· 1
3	4		2/7	· 1
4	5		2/9	· 1
5	6		2/11	· 1
6	7		2/13	· 1
7	8	$t''_{7,8}$	2/15	· 1

t	*t'*	Zeit-intervall	Bewertung	Anzahl Zeit-elemente
8	9	$t''_{8,9}$	2/17	· 1
9	10		2/19	· 1
10	11		2/21	· 1
60	61		2/121	· 1
60	80		40/140	· 20
90	95	$t''_{90,95}$	10/185	· 5
80	100	$t''_{80,100}$	40/180	· 20

[44] Westfalen-Blatt Nr. 304, 31.12.2011 *„Die Zeit rennt mit dem Alter schneller, weil man viel mehr Gleichartiges erlebt hat. Der Neuigkeitswert ist geringer", erklärt Prof. Dr. Markowitsch, Hirnforscher an der Uni Bielefeld. Ein Kind mache ständig neue Erfahrungen, die verarbeitet werden müssten und im Gehirn Speicherplatz benötigten. Mit dem Alter nehme das ab. Es geschehe weniger, was so fasziniere, dass es neue Spuren im Hirn hinterlasse. Von einem weiteren Erklärungsversuch der Wissenschaft berichtet Prof. Dr. Staiger: „Die biologische innere Uhr läuft mit dem Alter langsamer. Es könnte sein, dass deshalb die physikalische Zeit als schneller empfunden wird."*

4 Zusammenfassung

Eine Produktion, die für sich in Anspruch nimmt, dass zu jedem Zeitpunkt über jedes beliebige Ereignis zwischen beliebigen Akteuren kommuniziert werden kann, muss in der Lage sein, diese Ereignisse sachlich und zeitlich einzuordnen. Der angesprochene Anspruch wird in der vorliegenden Arbeit für Industrie 4.0-Realisierungen vorausgesetzt. Mit diesem Anspruch verbunden sind Fragestellungen, deren Beantwortung Voraussetzung für die Umsetzung von Industrie 4.0 sind.[45] Von diesen Fragestellungen wird hier der zeitliche Bezug eines Ereignisses aufgegriffen:

- Industrie 4.0 ist ereignisorientiert. Diese Ereignisse müssen in ihrer Aussage/Bedeutung verstanden werden.
- Wesentliche Beschreibungskomponente eines Ereignisses ist der zeitliche Bezug. Dafür muss ein Unternehmen ein anwendungsspezifisch aufgebautes Zeitmodell vereinbaren. Dazu gibt der Beitrag Hilfestellungen.
- Dieses Zeitmodell kann unterschiedlichen Anforderungen hinsichtlich Eindeutigkeit, Kombinierbarkeit, usw. gerecht werden. Dafür enthält der Beitrag Regeln.

Die Umsetzung in die Umwelt eines Unternehmens setzt bestimmte kardinale Zeitmodelle voraus. Die sich damit eröffnenden Möglichkeiten werden angesprochen.

Danksagung

Der Verfasser bedankt sich beim Reviewer für eine überaus wertvolle Kritik und zahlreiche äußerst konstruktive Hinweise.

---

45 siehe auch (Schwanninger, 1996)

a) Ein System Σ ist mehr als die Menge seiner Teile; erst die Relationen zwischen den Teilen machen den besonderen Charakter des Systems aus (Holistisches Gesetz): $\forall\Sigma\colon \Sigma \supset \kappa;\ \Sigma \setminus \kappa \neq \emptyset$.

b) Die Struktur *S* eines Systems Σ bestimmt seine Funktionen *F* (Gesetz der Funktionsbestimmtheit): $\forall\Sigma\colon \Sigma S \rightarrow \Sigma F$.

c) Eine gegebene Funktion *F* erlaubt nicht den Schluss auf die Struktur *S*; die Funktion eines Systems kann von verschiedenen Strukturen ΣS_j erzeugt werden (Gesetz der Äquifunktionalität): $\forall\Sigma\colon \neg\Sigma F \rightarrow \Sigma S$, weil $\exists(\Sigma S_1, \Sigma S_2, \Sigma S_3, \ldots)$, so dass $\forall\Sigma S_j\colon (\Sigma S_j \rightarrow \Sigma F)$. Für jede Funktion existieren mehrere Funktionszerlegungen.

d) Ein System kann auf einer einzigen Hierarchieebene nicht vollständig beschrieben werden (Gesetz des ausgeschlossenenen Reduktionismus): $\forall\Sigma\colon \Sigma \rightarrow (\Sigma^{+}, \Sigma')$

Der Werker aus der Einführung ist immer auf einer untergeordneten Hierarchieebene.

Literatur

Allen, J. F., 1984
Toward a General Theory of Action and Time. Artificial Intelligence 23, S. 123-154

Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A., 1979
Taschenbuch der Mathematik. 21. Aufl., hrsg. von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler, Moskau: Verlag Nauka; Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Bortz, J., 1999
Statistik für Sozialwissenschaftler. 5. Aufl. Berlin: Springer 1999

Carnap, R., 1974
Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaften. 2. Aufl., München: Nymphenburger Verlagsbuchhandlung

Drosdowski, G.; Müller, W.; Scholze-Stubenrecht, W.; Wermke, M. (Hrsg.), 1996
Duden Deutsches Universalwörterbuch. 3. Auflage. Mannheim: DUDEN Verlag

Ferschl, F., 1964
Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse. Grundlagen und Anwendungen der Theorie der Wartesysteme. Würzburg: Physica

Gausemeier, J., 2015
Szenario-basierte Entwicklung von Zukunftsoptionen für Industrie 4.0. Industrie 4.0-Forum Wissenschaft und Forschung, Hasso Plattner Institut, Universität Potsdam, 19. Februar 2015.

Klaus, G., Buhr, M., 1985
Philosophisches Wörterbuch. Berlin: deb Verlag das europäische buch

Kurzweil, R., 1999
Homo s@piens. Leben im 21. Jahrhundert - Was bleibt vom Menschen? Köln: Kiepenheuer & Witsch

Pichler, F., 1975
Mathematische Systemtheorie: dynamische Konstruktionen. Berlin: de Guyter

Schneider, U., 1996
Ein formales Modell und eine Klassifikation für die Fertigungssteuerung. Bd. 16, Paderborn: Heinz-Nixdorf-Institut

Straub, D., 1990
Eine Geschichte des Glasperlenspiels - Irreversibilität in der Physik: Irritationen und Folgen. Basel: Birkhäuser

Stroppe, H., 1981
Physik: ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen. Leipzig: VEB Fachbuchverlag